

Attention : cet examen comporte des instructions particulières.
Répondez aux questions suivant ces instructions.

שים לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

Mathématiques
5 unités d'étude - premier questionnaire

מתמטיקה
5 יחידות לימוד - שאלון ראשון

Instructions au candidat

הוראות לנבחן

א. Durée de l'examen : trois heures et demie.

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. Structure du questionnaire et barème de notation :

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

Ce questionnaire comporte trois parties contenant huit questions.

בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

Première partie — Algèbre et probabilités
Deuxième partie — Géométrie et trigonométrie planes
Troisième partie — Calcul différentiel et intégral, de polynômes, de fonctions racine, de fonctions rationnelles et de fonctions trigonométriques

פרק ראשון — אלגברה והסתברות
פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור
פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

Répondez à quatre questions de votre choix

— $4 \times 25 = 100$ points.

עליך לענות על ארבע שאלות לבחירתך — $25 \times 4 = 100$ נקודות.

ג. Matériel auxiliaire autorisé :

ג. חומר עזר מותר בשימוש

- (1) Calculatrice non graphique. Il est interdit d'utiliser les options de programmation d'une calculatrice programmable. L'utilisation d'une calculatrice graphique ou des options de programmation d'une calculatrice peut entraîner votre disqualification.
(2) Formulaires (jointes au sujet).
(3) Dictionnaire hébreu-langue étrangère / langue étrangère-hébreu.

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
(2) דפי נוסחאות (מצורפים).
(3) מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. Instructions supplémentaires :

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) Ne recopiez pas la question, indiquez seulement son numéro.
(2) Commencez chaque question sur une nouvelle page. Écrivez dans le cahier d'examen les étapes de la résolution, même lorsque les calculs se font à l'aide de la calculatrice. Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, en détail et de façon claire et ordonnée. Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

Écrivez dans votre cahier d'examen uniquement. Indiquez "טיוטה" en haut de chaque page utilisée comme brouillon. Écrire des notes de brouillon en dehors de celles du cahier d'examen, risque d'entraîner votre disqualification.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה. כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Bonne chance!

בהצלחה!

Questions

Attention : Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, de manière détaillée et claire.

Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Répondez à quatre des questions 1-8 (25 points par question).

Attention : Si vous répondez à plus de quatre questions, seules les quatre premières réponses de votre copie seront corrigées.

Première partie – Algèbre et probabilités

1. Netta, Daniela et Roni s'entraînent pour une épreuve de marche et de course sur un parcours AB d'une distance de 40 km.
À 8:00 Netta est partie du point A et a marché à une vitesse de 4 km/h en direction du point B .
À 9:36 Daniela est partie du point B et a couru en direction du point A .
Deux heures après que Netta est partie, Roni est partie du point B et a couru à une vitesse de 12 km/h en direction du point A .
Netta et Roni se sont rencontrées et ensuite chacune a poursuivi sa route respective.
Une heure et 36 minutes après que Netta et Roni se sont rencontrées, Daniela a atteint le point A .
La vitesse de chacune des sportives est constante tout au long de l'entraînement.
 - א. À quelle heure Netta et Roni se sont-elles rencontrées ?
 - ב. À quelle vitesse Daniela a-t-elle couru ? Justifiez votre réponse.
 - ג. Les trois sportives se sont-elles rencontrées en un même point durant leur parcours ? Justifiez votre réponse.

Chaque sportive qui atteint la fin du parcours, fait immédiatement demi-tour et repart vers son point de départ.

- ד. À quelle distance du point B Netta et Roni se sont-elles rencontrées la deuxième fois ? Justifiez votre réponse.

2. Soit la suite géométrique infinie a_n , dont les termes sont $a_1, a_2, a_3, \dots$ et dont la raison est q .

א. Exprimez les valeurs des sommes ci-dessous en fonction de a_1 et de q .

(1) $A = a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{40}$.

(2) $B = a_4 + a_8 + a_{12} + \dots + a_{40}$.

Il est donné que a_n est une suite croissante et que $\frac{A}{B} = \frac{10}{9}$.

ב. Déterminez la valeur de q .

À partir de la suite a_n donnée, on forme une suite géométrique infinie b_n qui vérifie $b_n = 3 \cdot a_{n+1}$ pour tout n entier naturel.

ג. Déterminez la raison de la suite b_n .

On forme une nouvelle suite géométrique infinie : $-\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, -\frac{1}{b_3}, \frac{1}{b_4}, \dots$.

ד. Exprimez la somme de tous les termes de la nouvelle suite en fonction de a_1 .

Soit la suite : $\frac{1}{a_1}, a_1, b_1$.

ה. (1) La suite peut-elle être arithmétique ? Justifiez votre réponse.

(2) La suite peut-elle être géométrique ? Justifiez votre réponse.

3. De nombreux élèves participent à une compétition sportive qui a lieu dans une école.

Chaque participant doit réussir à franchir 3 obstacles l'un après l'autre dans l'ordre. Tout participant qui ne réussit pas à franchir un obstacle est immédiatement éliminé de la compétition. La probabilité de réussir à franchir un obstacle varie d'un obstacle à l'autre mais elle est identique pour chaque participant. Tout participant qui réussit à franchir la totalité des trois obstacles est sélectionné pour la demi-finale.

28% des participants à cette compétition ont réussi à franchir les deux premiers obstacles.

La probabilité qu'un participant ayant réussi à franchir les deux premiers obstacles soit éliminé de la compétition est 3 fois plus élevée que la probabilité qu'il soit sélectionné pour la demi-finale.

א. Calculez la probabilité qu'un participant à la compétition soit sélectionné pour la demi-finale.

La probabilité qu'un participant réussisse à franchir le premier obstacle mais ne réussisse pas à franchir le deuxième est de 0,42.

ב. Calculez la probabilité qu'un participant à la compétition ne réussisse pas à franchir le premier obstacle.

ג. On a choisi au hasard trois participants, Omer, Gal et Lior. On sait que les trois ont réussi à franchir le premier obstacle.

(1) Calculez la probabilité qu'exactement deux d'entre eux soient sélectionnés pour la demi-finale.

(2) Calculez la probabilité que sur les trois participants, uniquement Omer et Gal soient sélectionnés pour la demi-finale.

Deuxième partie – Géométrie et trigonométrie planes

4. Deux cercles sont tangents l'un à l'autre intérieurement en un point P (voir figure).

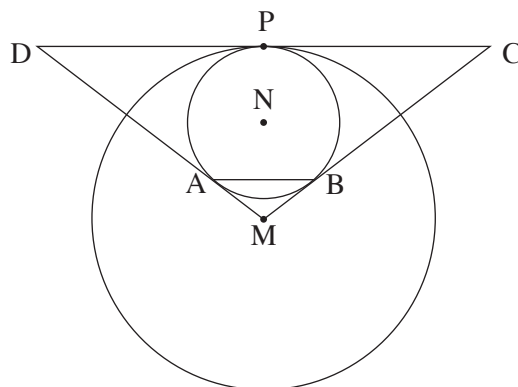
Les centres de ces cercles sont les points M et N .

Leur rayons sont respectivement R_1 et R_2 , $R_2 < R_1$.

On trace une tangente commune aux deux cercles passant par le point P .

Deux droites issues du point M sont tangentes au cercle de centre N , l'une au point A , l'autre au point B .

Ces droites coupent la tangente commune aux deux cercles aux points C et D , tel que cela est représenté sur la figure.



א. Démontrez que $AB \perp MN$.

ב. Démontrez que $AB \parallel DC$.

ג. Démontrez que $NB \cdot MC = MN \cdot \frac{DC}{2}$.

Données : $MN = 8$, $\frac{R_1}{R_2} = \frac{7}{3}$.

ד. (1) Déterminez R_1 et R_2 .

(2) Déterminez DC .

5. Le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle dont deux des côtés, AB et AD , sont tangents à un cercle de rayon R , respectivement aux points E et K (voir figure).

Le point C se trouve sur le cercle.

א. Démontrez que $\angle KCE = 45^\circ$.

Données : $\angle KCD = \alpha$, $0^\circ < \alpha < 45^\circ$.

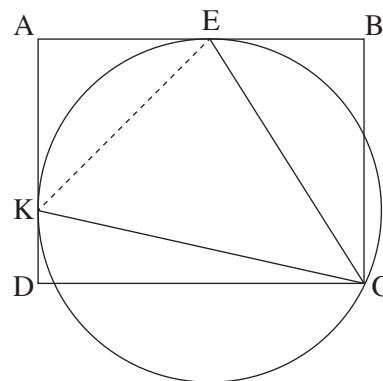
ב. (1) Exprimez les angles du triangle KCE en fonction de α .

(2) Exprimez les longueurs des côtés du triangle KCE en fonction de R et de α .

ג. Exprimez le rapport $\frac{EB}{AE}$ en fonction de α .

Données : $\frac{EB}{AE} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

ד. Calculez α .



Troisième partie – Calcul différentiel et intégral de polynômes, de fonctions racines, de fonctions rationnelles et de fonctions trigonométriques

6. Soit la fonction $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, $a > 0$ est un paramètre.

Exprimez vos réponses en fonction de a si nécessaire.

- א. Déterminez le domaine de définition de la fonction $f(x)$.
- ב. Démontrez que la fonction $f(x)$ est paire.
- ג. (1) Déterminez les coordonnées des points d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ avec les axes (s'il en existe).
(2) Déterminez les équations des asymptotes de la fonction $f(x)$ qui sont perpendiculaires aux axes (s'il en existe).
(3) Déterminez les coordonnées des points d'extremum de la fonction $f(x)$, puis déterminez leur type.
(4) Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.

Soit la fonction $(f(x))^2$ dont le domaine de définition est identique au domaine de définition de la fonction $f(x)$.

- ד. Déterminez les coordonnées des points d'extremum de la fonction $(f(x))^2$, puis déterminez leur type.

Soit la fonction $g(x) = \frac{1}{(f(x))^2}$ dont le domaine de définition est identique au domaine de définition de la fonction $f(x)$.

- ה. Fondez-vous sur les articles précédents pour tracer une esquisse du graphe de la fonction $g(x)$.

Substituez $a = 2$.

- ו. Calculez l'aire délimitée par le graphe de la fonction $g(x)$, par l'axe des abscisses et par les droites $x = 3$ et $x = 4$.

7. Soit la fonction $f(x) = \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)} + 3$.

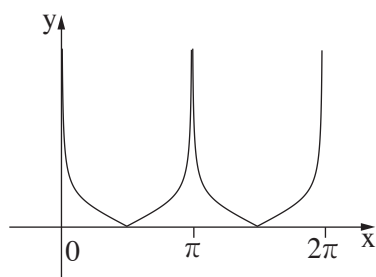
Répondez aux articles ci-dessous sur l'intervalle $0 \leq x \leq 2\pi$.

- א. (1) Déterminez le domaine de définition de la fonction $f(x)$.
 - (2) Déterminez les équations des asymptotes de la fonction $f(x)$ qui sont perpendiculaires aux axes.
 - (3) Déterminez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction $f(x)$.
 - (4) Déterminez les coordonnées des points d'extremum de la fonction $f(x)$, puis déterminez leur type.
- ב. Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.

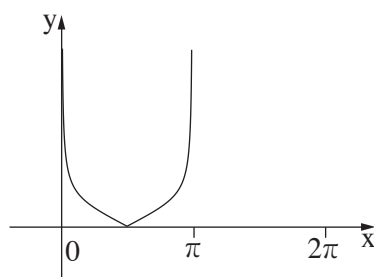
On considère deux fonctions $g(x) = \sqrt{f(x) - 3}$, $k(x) = f(x) - 3$.

- א. Un des graphes א-ז ci-dessous représente la fonction $k(x)$ et un autre des graphes représente la fonction $g(x)$.

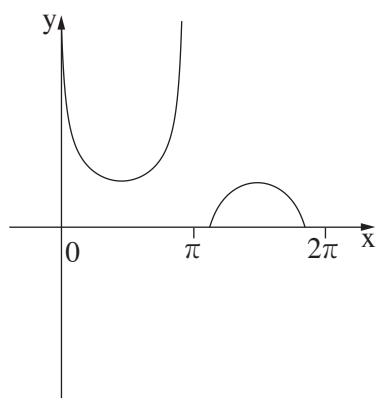
Déterminez quel graphe représente chacune de ces fonctions, puis justifiez vos choix.



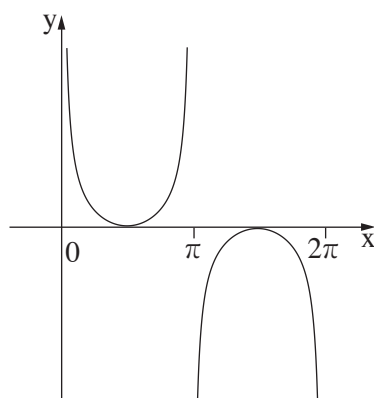
Grappe א



Grappe א



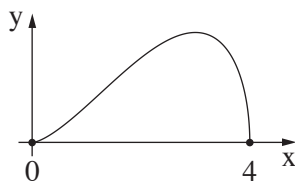
Grappe ז



Grappe ז

8. La figure ci-dessous représente la fonction $f(x) = \sqrt{a \cdot x^4 + b \cdot x^3}$.

Il est donné que le domaine de définition de la fonction $f(x)$ est $0 \leq x \leq 4$.



א. (1) Démontrez que $b = -4 \cdot a$.

(2) Ci-dessous figurent deux affirmations I et II. Seule l'une des deux est juste.

Déterminez laquelle des affirmations est juste puis justifiez votre choix.

I. $a > 0, b < 0$.

II. $a < 0, b > 0$.

Le point P se trouve sur le graphe de la fonction $(f(x))^2$ qui est définie elle aussi sur l'intervalle $0 \leq x \leq 4$. À partir du point P , on trace une droite perpendiculaire à l'axe des abscisses. M est le point d'intersection de cette perpendiculaire avec l'axe des abscisses et O est l'origine du repère.

א. Quelle est l'abscisse du point P pour laquelle l'aire du triangle PMO est maximale ?

Justifiez votre réponse.

א. Pour l'abscisse que vous avez déterminée à l'article א, exprimez l'aire maximale du triangle PMO en fonction de a .

ב. Si l'on sait que l'abscisse du point P se trouve sur l'intervalle dans lequel la fonction $(f(x))^2$ n'est pas décroissante, quelle est l'abscisse du point P pour laquelle l'aire du triangle PMO est maximale ? Justifiez votre réponse.

Bonne chance!

Tous droits réservés à l'État d'Israël.

Toute copie ou publication est interdite sans l'autorisation du
Ministère de l'Éducation.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך