

סוג הבחינה: גמר לבתי-ספר לטכנאים ולהנדסאים  
מועד הבחינה: אביב תשפ"א, 2021  
סמל השאלון: 714003  
נספחים: א. דף תשובות  
ב. מילון מונחים

## אלגברה ליניארית

### הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: ארבע שעות.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים.

|           |     |        |
|-----------|-----|--------|
| פרק ראשון | 64  | נקודות |
| פרק שני   | 36  | נקודות |
| סה"כ      | 100 | נקודות |

ג. חומר עזר מותר לשימוש: 1. כל חומר עזר כתוב בכתב-יד או מודפס על נייר.

2. מחשבון פשוט שאינו ניתן לתכנות.

ד. הוראות מיוחדות:

1. את התשובות לכל השאלות יש לסמן אך ורק בדף התשובות שבנספח א'.

2. ענה על מספר השאלות הנדרש בשאלון. המעריך יקרא ויעריך את מספר התשובות הנדרש בלבד, לפי סדר כתיבתן, ולא יתייחס לתשובות נוספות.

3. לנחותך, לשאלון זה מצורף מילון מונחים בשפות עברית, ערבית, אנגלית ורוסית. תוכל להיעזר בו בעת הצורך.

#### הוראות למשגיח:

בתום הבחינה יש לוודא שהנבחנים הדביקו את מדבקת הנבחן שלהם במקום המיועד לכך בדף התשובות שבנספח א' וצירפו אותו למחברת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד, בעמודים נפרדים, כל מה שברצונך לכתוב כטייטה (ראשי פרקים, חישובים וכדומה).

כתוב "טייטה" בראש כל עמוד טייטה. כתיבת טיוטות כלשהן על דפים שמחוץ למחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה!

בשאלון זה 24 עמודים ו-3 עמודי נספחים.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר, אך מכוונות הן לנבחנות והן לנבחנים.

בהצלחה!

המשך מעבר לדף

## השאלות

### פרק ראשון (64 נקודות)

בפרק זה יש חמש שאלות – 1–5, ובהן יחד 25 סעיפים.

ענה על 16 סעיפים בסך-הכול מחמש השאלות יחד (לכל סעיף – 4 נקודות).

בכל סעיף בחר את התשובה הנכונה, והקף בעיגול את הספרה המייצגת אותה בדף התשובות שבנספח א'.

הערה: טענה נחשבת כנכונה אם היא נכונה **תמיד**.

### שאלה 1

הסעיפים א'–ג' מתייחסים לנתונים שלהלן:

נתונה מערכת המשוואות שלהלן:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + (m + 1)y + 2z = 3 \\ 2x + 3y + mz = 3 \end{cases}$$

א. מהי הדטרמיננטה של מטריצת המקדמים?

1. 0

2.  $m(m - 2)$

3.  $m(m + 1)$

4.  $(m - 2)(m + 3)$

ב. קבע איזה מבין ההיגדים שלהלן נכון:

1. בעבור כל  $m \in \mathbb{R}$  יש למערכת המשוואות פתרון יחיד
2. בעבור כל  $m \in \{0, -1\}$  יש למערכת המשוואות פתרון יחיד
3. בעבור כל  $m \in \{2, -3\}$  יש למערכת המשוואות פתרון יחיד
4. לא קיים  $m \in \mathbb{R}$  שבעבורו יש למערכת המשוואות פתרון יחיד

ג. קבע איזה מבין ההיגדים שלהלן נכון:

1. בעבור  $m = 2$  יש למערכת המשוואות אינסוף פתרונות
2. בעבור  $m = 0$  ו-  $m = -1$  יש למערכת המשוואות אינסוף פתרונות
3. בעבור  $m = 2$  ו-  $m = -3$  יש למערכת המשוואות אינסוף פתרונות
4. קיימים אינסוף ערכי  $m$  שבעבורם יש למערכת המשוואות אינסוף פתרונות

**סעיפים ד'-ה' מתייחסים למערכת משוואות לא הומוגנית  $A\underline{x} = \underline{b}$ , כאשר  $A$  היא מטריצה מסדר  $n \times n$ , ונתון שיש למערכת המשוואות לפחות שני פתרונות שונים.**

ד. קבע איזה מבין ההיגדים שלהלן **אינו** נכון:

1. למערכת ההומוגנית המתאימה  $A\underline{x} = 0$  יש אינסוף פתרונות
2.  $A$  היא מטריצה הפיכה
3. שורותיה של המטריצה  $A$  תלויות ליניארית
4. דרגת העמודות של המטריצה  $A$  קטנה מ- $n$

ה. קבע איזה מבין ההיגדים שלהלן נכון:

1.  $|A^2| = 0$
2. ניתן להגיע מ- $A^2$  למטריצת היחידה על-ידי דירוג שורות
3. קיימת מטריצה ריבועית  $B$  כך ש-  $AB = BA = I$
4. לכל  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$  מתקיים  $A\underline{x} = \underline{b}$

## שאלה 2

סעיפים א' - ג' מתייחסים למטריצות A ו-B הפיכות מסדר 4.

א. קבע איזה מבין ההיגדים שלהלן נכון:

1.  $AB^T AB$  היא מטריצה הפיכה

2.  $A^T + B^T$  היא מטריצה הפיכה

3.  $AB = BA$

4. אם  $A\underline{x} = \underline{b}$  אז  $A^{-1}\underline{b} = \underline{B\underline{x}}$

ב. נתון ש-  $|A| = k$  וכן ש-  $B = 2A$ .

מהו הערך של  $|AB^2|$ ?

1.  $12k$

2.  $4k^3$

3.  $32k^3$

4.  $256k^3$

ג. נתון ש-  $\underline{u}, \underline{v}$  הם פתרונות שונים של המשוואה  $A\underline{x} = B\underline{x} + 4\underline{x}$ .

קבע איזה מבין ההיגדים שלהלן נכון:

1.  $|A - B - 4I| = |A| - |B| - |4I|$

2.  $|A - B| = 4$

3. לא ניתן לדעת מן הנתונים מהו הערך של  $|A - B - 4I|$

4.  $|A - B - 4I| = 0$

שתי ההגדרות שלהלן מתייחסות לסעיפים ד'-ה' שיופיעו בהמשך:

מטריצה  $A$  נקראת **אנטי-סימטרית** אם  $A^T = -A$ .

מטריצה  $A$  נקראת **סימטרית** אם  $A^T = A$ .

ד. תהי  $A$  מטריצה ריבועית אנטי-סימטרית מסדר 3.

קבע איזה מבין ההיגדים שלהלן **אינו** נכון:

1.  $|A| = 0$

2.  $(A + A^T)^2 = 0$

3.  $A^2$  היא מטריצה סימטרית

4.  $A^2$  היא מטריצה אנטי-סימטרית

ה. נתונות מטריצות אנטי-סימטריות  $A$  ו- $B$ .

קבע איזה מבין ההיגדים שלהלן נכון:

1.  $A - B$  היא מטריצה סימטרית

2.  $A - B$  היא מטריצה אנטי-סימטרית

3.  $A - B$  אינה מטריצה סימטרית ואינה מטריצה אנטי-סימטרית

4.  $A - B$  שווה למטריצת האפס

### שאלה 3

סעיפים א' - ב' מתייחסים לנתונים שלהלן:

תהי  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  טרנספורמציה ליניארית, כאשר  $n, m \geq 1$ .

כמו כן, נתון כי  $\dim(\text{Ker } T) = \dim(\text{Im } T)$ .

א. קבע איזה מבין ההיגדים שלהלן נכון:

1.  $n$  בהכרח זוגי

2.  $n$  בהכרח אי-זוגי

3. לא ייתכן ש-  $m > n$

4. לא ייתכן ש-  $m < n$

ב. קבע איזה מבין ההיגדים שלהלן נכון:

1.  $T$  הפיכה

2.  $T$  אינה חד-חד-ערכית

3.  $T$  היא על

4. אם  $T$  היא על, אז  $T$  היא חד-חד-ערכית

סעיפים ג' - ה' מתייחסים לנתונים שלהלן:

נתונה טרנספורמציה ליניארית  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , המקיימת  $T(\underline{v}) = A\underline{v}$  לכל  $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ ,

$$\text{כאשר } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

ג. מהו הממד של  $\text{Ker } T$ ?

1. 0

2. 1

3. 2

4. 3

ד. בעבור איזה ערך של  $m$  יהיה הווקטור  $\begin{pmatrix} 4 \\ 2m+9 \\ 22 \end{pmatrix}$  שייך ל- $\text{Im} T$ ?

1. בעבור  $m = 0$
2. בעבור  $m = 1$
3. בעבור  $m = 2$
4. בעבור כל ערך ממשי של  $m$

ה. בעבור איזה ערך שלם וחיובי של  $k$  תהיה המטריצה  $A^k$  הפיכה?

1. בעבור כל  $k$  זוגי
2. בעבור  $k \geq 10$
3. בעבור  $k = 3$
4. לא קיים ערך כזה של  $k$

#### שאלה 4

סעיפים א'-ב' מתייחסים לנתונים שלהלן:

תהי  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  קבוצת וקטורים במרחב  $\mathbb{R}^3$ .

א. קבע איזה מבין ההיגדים שלהלן נכון:

1. ייתכן ש- $\text{Sp}\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \mathbb{R}^3$
2.  $\dim \text{Sp}\{v_1, v_2, v_3\} = 3$
3.  $\dim \text{Sp}\{v_1, v_2, v_3\} > \dim \text{Sp}\{v_1, v_2\}$
4. כל קבוצה של שלושה וקטורים מתוך הקבוצה  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  היא בלתי תלויה ליניארית

ב. קבע איזה מבין ההיגדים שלהלן **אינו** נכון:

1. הקבוצה  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  תלויה ליניארית
2. ייתכן שהקבוצה  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  פורשת את  $\mathbb{R}^3$
3. קיימים  $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$  כך ש- $t_1 v_1 + t_2 v_2 + t_3 v_3 - v_4 = 0$
4. ייתכן שהקבוצה  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  מכילה בסיס של  $\mathbb{R}^3$

סעיפים ג'-ה' מתייחסים למטריצה שלהלן:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

ג. מהי דרגת השורות של המטריצה  $A$  ?

0 1.

2 2.

3 3.

4 4.

ד. קבע איזה מבין ההיגדים שלהלן **אינו** נכון:

1. העמודות של המטריצה  $A$  פורשות את המרחב  $\mathbb{R}^3$

2. השורות של המטריצה  $A$  פורשות תת-מרחב של  $\mathbb{R}^4$

3. ניתן להגיע מ- $A$  אל מטריצה בעלת שורת אפסים בעזרת פעולות שורה אלמנטריות

4. ממד המרחב הנפרש על-ידי עמודות המטריצה  $A$  שווה לממד המרחב הנפרש על-ידי שורות המטריצה  $A$

ה. תהי  $A$  קבוצת וקטורים במרחב  $\mathbb{R}^8$ . נסמן ב- $k$  את מספר האיברים בקבוצה  $A$ .

קבע איזה מבין ההיגדים שלהלן **אינו** נכון:

1. אם  $A$  בלתי תלויה ליניארית, אזי כל תת-קבוצה של  $A$  היא בלתי תלויה ליניארית

2. אם  $A$  בלתי תלויה ליניארית, אזי  $k \leq 8$

3. אם  $A$  פורשת את  $\mathbb{R}^8$ , אזי  $k \geq 8$

4. אם  $A$  תלויה ליניארית, אזי  $k \geq 8$



## שאלה 5

סעיפים א' - ב' מתייחסים לנתונים שלהלן:

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ היא טרנספורמציה ליניארית המוגדרת על-ידי } T(\underline{v}) = A\underline{v}, \text{ כאשר } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

א. מהם הערכים העצמיים של  $T$  ?

1.  $1, 1, 7$

2.  $1, 7, 7$

3.  $2, 0, 7$

4. למטריצה זו אין ערכים עצמיים ממשיים

ב. קבע איזה מבין ההיגדים שלהלן נכון:

1.  $\dim \text{Im} T = 1$

2.  $\dim \text{Ker} = 1$

3. קיימים אינסוף וקטורים  $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ , כך ש-  $T\underline{v} = \underline{v}$

4. הווקטור  $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$  הוא וקטור עצמי של  $T$

ג. תהי  $T: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$  העתקה ליניארית.קבע איזה מבין ההיגדים שלהלן **אינו נכון**:

1. אם  $\underline{v}_1$  ו-  $\underline{v}_2$  הם וקטורים עצמיים של  $T$  המתאימים לווקטור העצמי  $\lambda_1$ , אזי  $\underline{v}_1 + 2\underline{v}_2$  הוא גם וקטור עצמי שמתאים לווקטור העצמי  $\lambda_1$

2. אם  $\lambda_1$  ו-  $\lambda_2$  הם ערכים עצמיים של  $T$ , אזי גם  $\lambda_1 + \lambda_2$  הוא ערך עצמי של  $T$

3. אם  $\lambda_1$  ו-  $\lambda_2$  הם ערכים עצמיים של  $T$ , אזי ייתכן שגם  $\lambda_1 \lambda_2$  הוא ערך עצמי של  $T$

4. אם  $\underline{v}_1$  הוא וקטור עצמי של  $T$  ומתקיים ש-  $T(\underline{v}_1) = \underline{v}_2$ , אזי הקבוצה  $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$  תלויה ליניארית

סעיפים ד'-ה' מתייחסים לטרנספורמציה הליניארית  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$\text{המקיימת: } T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -10 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ד. קבע איזה מבין ההיגדים שלהלן **אינו** נכון:

1. הטרנספורמציה  $T$  אינה חד־חד־ערכית
2. לטרנספורמציה  $T$  יש לפחות שני ערכים עצמיים שונים
3. ייתכן ש-  $\text{Im } T = \mathbb{R}^3$
4. קיימים אינסוף וקטורים  $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$  כך ש-  $T(\underline{v}) = -2\underline{v}$

ה. נתון גם ש-  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  הוא וקטור עצמי של הערך העצמי 5 של  $T$ .

$$\text{מהו } T \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} ?$$

$$1. \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$4. \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix}$$

## פרק שני (36 נקודות)

בפרק זה יש שלוש שאלות – 6-8, ובהן יחד 21 סעיפים.

ענה על 12 סעיפים בסך-הכול משלוש השאלות יחד (לכל סעיף – 3 נקודות).

בכל סעיף בחר את התשובה הנכונה, והקף בעיגול את הספרה המייצגת אותה בדף התשובות שבנספח א'.

### שאלה 6

להלן בעיית תכנון ליניארי:

$$\text{Max}\{z = 10x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 20x_4\}$$

$$\text{s.t.} \quad 1) 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 2$$

$$2) 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 8$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

לאחר הרצת האלגוריתם סימפלקס בעבור הבעיה הנתונה, מתקבלת הטבלה הסופית שלהלן:

| בסיס           | z | x <sub>1</sub> | x <sub>2</sub> | x <sub>3</sub> | x <sub>4</sub> | S <sub>1</sub> | S <sub>2</sub> | RHS |
|----------------|---|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----|
| z              | a | b              | c              | d              | e              | f              | g              | h   |
| x <sub>4</sub> | i | j              | k              | l              | m              | n              | o              | p   |
| s <sub>2</sub> | q | r              | s              | t              | u              | v              | w              | y   |

א. מהם הערכים האופטימליים של משתני ההחלטה?

$$1. \quad x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$$

$$2. \quad x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0$$

$$3. \quad x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0$$

$$4. \quad x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1$$

ב. כמה אפסים מופיעים בטבלה הסופית?

1. שלושה
2. ארבעה
3. חמישה
4. שישה

ג. קבע איזה מבין ההיגדים שלהלן נכון:

1. משתנה הסרק של אילוך 1 הוא משתנה בסיסי, ומשתנה הסרק של אילוך 2 הוא משתנה לא בסיסי
2. משתנה הסרק של אילוך 1 הוא משתנה לא בסיסי, ומשתנה הסרק של אילוך 2 הוא משתנה בסיסי
3. משתני הסרק של כל האילוצים הם משתנים בסיסיים
4. משתני הסרק של כל האילוצים הם משתנים לא בסיסיים

ד. קבע איזה מבין ההיגדים שלהלן נכון:

1.  $d + t = j$
2.  $n + v = g$
3.  $i + q = a$
4.  $l = v$

ה. בהתייחס לבעיה הדואלית המתאימה לבעיית התכנון הליניארי – כמה מקדמים שערכם 2 יופיעו באילוצים של הבעיה הדואלית?

1. אחד
2. שניים
3. שלושה
4. ארבעה

1. לבעיה הפרימלית המקורית הוסיפו משתנה חדש,  $x_{\text{new}}$ , והתקבלה הבעיה שלהלן:

$$\text{Max}\{z = 10x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 20x_4 + 20x_{\text{new}}\}$$

$$\text{s.t.} \quad 1) 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2 + 2x_{\text{new}} \leq 2$$

$$2) 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_{\text{new}} \leq 8$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_{\text{new}} \geq 0$$

קבע איזה מבין ההיגדים שלהלן נכון:

1. הפתרון האופטימלי של הבעיה הפרימלית יהיה פתרון לא אפשרי, והפתרון האופטימלי של הבעיה הדואלית יהיה פתרון שאינו חסום
2. הפתרון האופטימלי של הבעיה הפרימלית יישאר אופטימלי, והפתרון האופטימלי של הבעיה הדואלית יפסיק להיות אופטימלי
3. הפתרון האופטימלי של הבעיה הפרימלית וגם הפתרון האופטימלי של הבעיה הדואלית יהיו פתרונות לא אפשריים
4. הפתרון האופטימלי של הבעיה הפרימלית וגם הפתרון האופטימלי של הבעיה הדואלית יישארו אופטימליים

2. בהתייחס לפתרון הבעיה הדואלית – קבע איזה מבין ההיגדים שלהלן נכון:

$$1. y_1 = p, y_2 = y$$

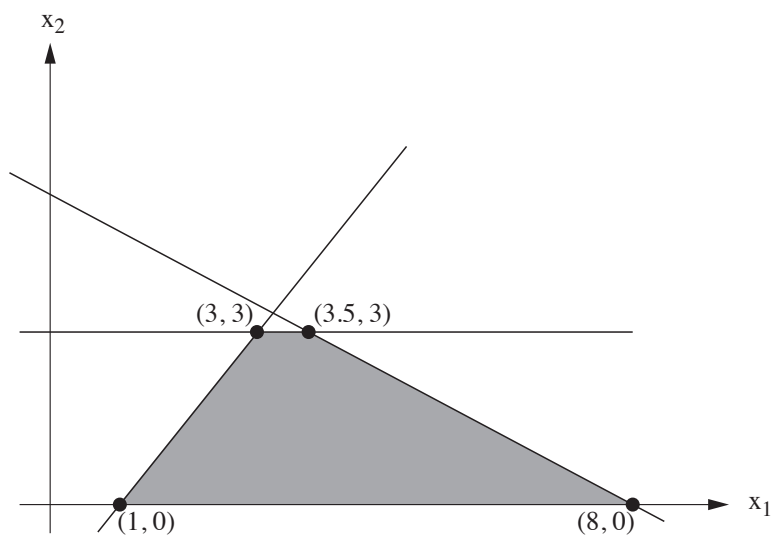
$$2. y_1 = y, y_2 = p$$

$$3. y_1 = f, y_2 = g$$

$$4. y_1 = g, y_2 = f$$

## שאלה 7

להלן סרטוט של מערכת אילוצים לבעיית תכנון ליניארי כלשהי. השטח המסומן מהווה את תחום הפתרונות האפשריים של הבעיה.



איור לשאלה 7

א. מהי מערכת האילוצים המתאימה לבעיה?

1.

$$1) \ 2x_1 + 3x_2 \leq 16$$

$$2) \ 3x_1 - 2x_2 \leq 3$$

$$3) \quad x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0$$

2.

$$1) \ 2x_1 + 3x_2 \leq 16$$

$$2) \ 3x_1 - 2x_2 \geq 3$$

$$3) \quad x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0$$

3.

$$1) \ 2x_1 + 3x_2 \geq 16$$

$$2) \ 3x_1 - 2x_2 \geq 3$$

$$3) \quad x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0$$

4.

$$1) \ 2x_1 + 3x_2 \leq 16$$

$$2) \ 3x_1 - 2x_2 \geq 3$$

$$3) \quad x_2 \geq 3$$

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0$$

ב. נתונה פונקציית המטרה:  $\text{Min}\{z = 20x_1 + 40x_2\}$ , הכפופה למערכת האילוצים שהוצגה בגרף.

קבע איזה מבין ההיגדים שלהלן נכון:

1. לבעיה יש פתרון אופטימלי יחיד בנקודה (1,0)
2. לבעיה יש פתרון אופטימלי יחיד בנקודה (3,3)
3. לבעיה יש פתרון אופטימלי יחיד בנקודה (3.5,3)
4. לבעיה יש פתרון אופטימלי יחיד בנקודה (8,0)

ג. נתונה פונקציית המטרה:  $\text{Max}\{z = 20x_1 + 40x_2\}$ , הכפופה למערכת האילוצים שהוצגה בגרף.

קבע איזה מבין ההיגדים שלהלן נכון:

1. לבעיה יש פתרון אופטימלי יחיד בנקודה (3,3)
2. לבעיה יש פתרון אופטימלי יחיד בנקודה (3.5,3)
3. לבעיה יש פתרון אופטימלי יחיד בנקודה (8,0)
4. מתקבל מצב של ריבוי פתרונות אופטימליים

ד. נתונה פונקציית המטרה:  $\text{Max}\{z = 20x_1 + 40x_2\}$ . כמו כן, נתון כי למערכת האילוצים שהוצגה בגרף מוסיפים אילוץ

חדש, והוא:  $x_1 \geq 5$ .

קבע איזה מבין ההיגדים שלהלן נכון:

1. הפתרון האופטימלי יהפוך לפתרון לא אפשרי, וערך הפתרון האופטימלי החדש יהיה גדול מערך הפתרון האופטימלי המקורי
2. הפתרון האופטימלי יהפוך לפתרון לא אפשרי, וערך הפתרון האופטימלי החדש יהיה קטן מערך הפתרון האופטימלי המקורי
3. הפתרון האופטימלי יפסיק להיות אופטימלי אך יישאר אפשרי
4. הפתרון האופטימלי יישאר אופטימלי



ה. נתונה פונקציית המטרה:  $\text{Max}\{z = 20x_1 + \beta x_2\}$ , הכפופה למערכת האילוצים שהוצגה בגרף.

בעבור איזה ערך של  $\beta$  יתקבל מצב של ריבוי פתרונות?

1. 20

2. 25

3. 30

4. 35

ו. נתונה בעיה כלשהי הכוללת שני משתני החלטה.

קבע איזה מבין ההיגדים שלהלן בהכרח נכון:

1. אם שני מקדמי המשתנים בפונקציית המטרה שווים בערכם, יתקבל מצב של ריבוי פתרונות

2. אם שני מקדמי המשתנים בפונקציית המטרה הם ערכים חיוביים, פונקציית המטרה תהיה בעלת שיפוע חיובי

3. אם שני מקדמי המשתנים בפונקציית המטרה הם ערכים שליליים, פונקציית המטרה תהיה בעלת שיפוע חיובי

4. אם שני מקדמי המשתנים בפונקציית המטרה הם ערכים שליליים, פונקציית המטרה תהיה בעלת שיפוע שלילי

ז. למערכת אילוצים כלשהי מוסיפים אילוץ חדש מסוג "גדול-שווה".

קבע איזה מבין ההיגדים שלהלן נכון:

1. התחום האפשרי יגדל בהכרח

2. התחום האפשרי יקטן בהכרח

3. ייתכן שהתחום האפשרי יישאר ללא שינוי

4. לא ניתן לענות על השאלה מבלי לדעת מהם אילוצי הבעיה

## שאלה 8

ברחבי העולם נרשמה התפרצות של ארבעת הנגיפים האלה:

- נגיף A
- נגיף B
- נגיף C
- נגיף D

מדענים פיתחו חמש שיטות שונות לטיפול בנגיפים:

- שיטת טיפול 1
- שיטת טיפול 2
- שיטת טיפול 3
- שיטת טיפול 4
- שיטת טיפול 5

בטבלה שלהלן מוצגת העלות של שיטות הטיפול בכל אחד מן הנגיפים:

|        | שיטת טיפול 1 | שיטת טיפול 2 | שיטת טיפול 3 | שיטת טיפול 4 | שיטת טיפול 5 |
|--------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| נגיף A | 251          | 203          | 161          | 161          | 111          |
| נגיף B | 300          | 157          | 182          | 175          | 253          |
| נגיף C | 203          | 222          | –            | 151          | 342          |
| נגיף D | 156          | 183          | 123          | 165          | 187          |

משרד הבריאות קבע כי כל נגיף יטופל בשיטת טיפול אחת בלבד, וכל שיטת טיפול תשמש בעבור טיפול בנגיף אחד בלבד. יש למצוא באיזו מבין חמש שיטות הטיפול יש להשתמש בעבור כל אחד מבין ארבעת הנגיפים, כך שסך-כול העלות תהיה מינימלית.

א. מהו הערך האופטימלי של פתרון בעיית ההשמה?

1. 245

2. 542

3. 641

4. 734

ב. לארבעת הנגיפים שצוינו לעיל הצטרף נגיף חדש – נגיף E.

בטבלה שלהלן מוצגת העלות של כל אחת משיטות הטיפול בנגיף E:

|        | שיטת טיפול 1 | שיטת טיפול 2 | שיטת טיפול 3 | שיטת טיפול 4 | שיטת טיפול 5 |
|--------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| נגיף E | 150          | 230          | 190          | 180          | 350          |

בחר בהיגד הנכון בעבור הפתרון האופטימלי לבעיית ההשמה:

1. נגיף A מטופל בשיטת טיפול 5, נגיף B מטופל בשיטת טיפול 1, ונגיף C מטופל בשיטת טיפול 3

2. נגיף A מטופל בשיטת טיפול 5, נגיף B מטופל בשיטת טיפול 2, ונגיף C מטופל בשיטת טיפול 4

3. נגיף A מטופל בשיטת טיפול 1, נגיף B מטופל בשיטת טיפול 3, ונגיף C מטופל בשיטת טיפול 4

4. נגיף A מטופל בשיטת טיפול 1, נגיף B מטופל בשיטת טיפול 3, ונגיף C מטופל בשיטת טיפול 2

ג. בטבלה שלפניך מוצגים עלות ההובלה ליחידה, וכן נתוני ההיצע והביקוש בעבור בעיית תובלה כלשהי.

נוסף על כך, נתון כי  $X_{12}$  הוא משתנה בסיסי שערכו אפס (משתנה מנוון).

| מקורות | יעדים |         |     | היצע |
|--------|-------|---------|-----|------|
|        | 1     | 2       | 3   |      |
| 1      | 8     | 10<br>0 | 18  | 40   |
| 2      | 10    | 6       | 8   | 100  |
| 3      | 10    | 24      | 26  | 70   |
| ביקוש  | 40    | 10      | 160 |      |

מהם הערכים של המשתנים הבסיסיים בפתרון הבסיסי האפשרי ההתחלתי, המתקבל ב"שיטת הפינה הצפונית-מערבית"?

$$1. \quad X_{11} = 40, X_{21} = 0, X_{22} = 10, X_{23} = 70, X_{33} = 90$$

$$2. \quad X_{11} = 40, X_{21} = 40, X_{22} = 10, X_{23} = 90, X_{33} = 70$$

$$3. \quad X_{11} = 40, X_{12} = 0, X_{22} = 10, X_{23} = 90, X_{33} = 70$$

$$4. \quad X_{11} = 40, X_{12} = 0, X_{23} = 100, X_{32} = 10, X_{33} = 60$$

ד. להלן פתרון בסיסי לבעיית תובלה. כמו כן, נתון כי:  $U_2 = 0$ .

| מקורות | יעדים   |        |          | היצע | $U_i$ |
|--------|---------|--------|----------|------|-------|
|        | 1       | 2      | 3        |      |       |
| 1      | 5       | 7 (50) | 10 (40)  | 90   |       |
| 2      | 4 (100) | 9      | 2        | 100  | 0     |
| 3      | 2 (0)   | 3      | 12 (110) | 110  |       |
| ביקוש  | 100     | 50     | 150      |      |       |
| $V_j$  |         |        |          |      |       |

קבע מהו ההיגד הנכון מבין ההיגדים שלהלן:

1.  $U_1 = -4$  ,  $U_3 = -2$  ,  $V_1 = 4$  ,  $V_2 = 11$  ,  $V_3 = 14$

2.  $U_1 = -4$  ,  $U_3 = -4$  ,  $V_1 = 5$  ,  $V_2 = 11$  ,  $V_3 = 14$

3.  $U_1 = 9$  ,  $U_3 = 0$  ,  $V_1 = -4$  ,  $V_2 = 11$  ,  $V_3 = 1$

4.  $U_1 = 0$  ,  $U_3 = 11$  ,  $V_1 = -9$  ,  $V_2 = 11$  ,  $V_3 = 12$

ה. בטבלה שלהלן מוצגים מחירי ההובלה ליחידה מכל מקור לכל יעד, נתוני ההיצע של מקורות, נתוני הביקוש של יעדים, וכן מחירי הצל.

| מקורות | יעדים |     |     | היצע | $U_i$ |
|--------|-------|-----|-----|------|-------|
|        | 1     | 2   | 3   |      |       |
| 1      | 5     | 7   | 10  | 250  | 0     |
| 2      | 4     | 12  | 15  | 150  | 4     |
| 3      | 2     | 10  | 12  | 120  | 2     |
| ביקוש  | 170   | 200 | 150 |      |       |
| $V_j$  | 0     | 7   | 10  |      |       |

מהו הפתרון הבסיסי האפשרי המתאים למחירי הצל הנתונים?

1.  $X_{12} = 150$  ,  $X_{13} = 100$  ,  $X_{21} = 200$  ,  $X_{31} = 20$  ,  $X_{33} = 50$

2.  $X_{12} = 200$  ,  $X_{13} = 100$  ,  $X_{21} = 150$  ,  $X_{32} = 20$  ,  $X_{33} = 50$

3.  $X_{12} = 150$  ,  $X_{13} = 20$  ,  $X_{21} = 200$  ,  $X_{32} = 50$  ,  $X_{33} = 100$

4.  $X_{12} = 200$  ,  $X_{13} = 50$  ,  $X_{21} = 150$  ,  $X_{31} = 20$  ,  $X_{33} = 100$

ו. להלן פתרון אופטימלי לבעיית תובלה:

| מקורות | יעדים     |            |            | היצע | $U_i$ |
|--------|-----------|------------|------------|------|-------|
|        | 1         | 2          | 3          |      |       |
| 1      | 5         | 7<br>(80)  | 12<br>(0)  | 80   | - 6   |
| 2      | 3<br>(70) | $\alpha$   | 21         | 70   | 3     |
| 3      | 2         | 12<br>(60) | 17<br>(60) | 120  | - 1   |
| ביקוש  | 70        | 140        | 60         |      |       |
| $V_j$  | 0         | 13         | 18         |      |       |

בעבור איזה ערך של  $\alpha$  הפתרון יישאר אופטימלי?

- 1.  $\alpha \geq 3$
- 2.  $\alpha \geq 13$
- 3.  $\alpha \geq 16$
- 4.  $\alpha \geq 17$

ז. בסעיף זה נדרש להציע פתרון בסיסי אפשרי לפי "שיטת הקירוב של ווגל", בעבור בעיית התובלה שלהלן:

| מקורות | יעדים |     |    | היצע |
|--------|-------|-----|----|------|
|        | 1     | 2   | 3  |      |
| 1      | 22    | 11  | 19 | 200  |
| 2      | 10    | 13  | 14 | 150  |
| 3      | 10    | 15  | 12 | 70   |
| ביקוש  | 120   | 250 | 50 |      |

קבע איזה מבין ההיגדים שלהלן נכון:

1.  $X_{12} = 150$  ,  $X_{13} = 120$  ,  $X_{21} = 200$  ,  $X_{32} = 20$  ,  $X_{33} = 30$

2.  $X_{12} = 200$  ,  $X_{21} = 120$  ,  $X_{23} = 50$  ,  $X_{32} = 50$  ,  $X_{33} = 0$

3.  $X_{12} = 200$  ,  $X_{21} = 120$  ,  $X_{22} = 30$  ,  $X_{32} = 20$  ,  $X_{33} = 50$

4.  $X_{12} = 150$  ,  $X_{13} = 100$  ,  $X_{21} = 200$  ,  $X_{32} = 20$  ,  $X_{33} = 50$

הדבק את מדבקת הנבחן שלך במקום המיועד לכך בדף התשובות, והדק אותו למחברת הבחינה.

**בהצלחה!**



הדבק את מדבקת הנבחן שלך במקום המיועד לכך, והדק את הדף הזה למחברת הבחינה שלך.  
הקף בעיגול את הספרה המייצגת את התשובה הנכונה לכל סעיף.

| שאלה 1 |   |   |   |   | שאלה 2 |   |   |   |   | שאלה 3 |   |   |   |   | שאלה 4 |   |   |   |   |
|--------|---|---|---|---|--------|---|---|---|---|--------|---|---|---|---|--------|---|---|---|---|
| סעיף א | 1 | 2 | 3 | 4 | סעיף א | 1 | 2 | 3 | 4 | סעיף א | 1 | 2 | 3 | 4 | סעיף א | 1 | 2 | 3 | 4 |
| סעיף ב | 1 | 2 | 3 | 4 | סעיף ב | 1 | 2 | 3 | 4 | סעיף ב | 1 | 2 | 3 | 4 | סעיף ב | 1 | 2 | 3 | 4 |
| סעיף ג | 1 | 2 | 3 | 4 | סעיף ג | 1 | 2 | 3 | 4 | סעיף ג | 1 | 2 | 3 | 4 | סעיף ג | 1 | 2 | 3 | 4 |
| סעיף ד | 1 | 2 | 3 | 4 | סעיף ד | 1 | 2 | 3 | 4 | סעיף ד | 1 | 2 | 3 | 4 | סעיף ד | 1 | 2 | 3 | 4 |
| סעיף ה | 1 | 2 | 3 | 4 | סעיף ה | 1 | 2 | 3 | 4 | סעיף ה | 1 | 2 | 3 | 4 | סעיף ה | 1 | 2 | 3 | 4 |
| שאלה 5 |   |   |   |   | שאלה 6 |   |   |   |   | שאלה 7 |   |   |   |   | שאלה 8 |   |   |   |   |
| סעיף א | 1 | 2 | 3 | 4 | סעיף א | 1 | 2 | 3 | 4 | סעיף א | 1 | 2 | 3 | 4 | סעיף א | 1 | 2 | 3 | 4 |
| סעיף ב | 1 | 2 | 3 | 4 | סעיף ב | 1 | 2 | 3 | 4 | סעיף ב | 1 | 2 | 3 | 4 | סעיף ב | 1 | 2 | 3 | 4 |
| סעיף ג | 1 | 2 | 3 | 4 | סעיף ג | 1 | 2 | 3 | 4 | סעיף ג | 1 | 2 | 3 | 4 | סעיף ג | 1 | 2 | 3 | 4 |
| סעיף ד | 1 | 2 | 3 | 4 | סעיף ד | 1 | 2 | 3 | 4 | סעיף ד | 1 | 2 | 3 | 4 | סעיף ד | 1 | 2 | 3 | 4 |
| סעיף ה | 1 | 2 | 3 | 4 | סעיף ה | 1 | 2 | 3 | 4 | סעיף ה | 1 | 2 | 3 | 4 | סעיף ה | 1 | 2 | 3 | 4 |
| סעיף ו |   |   |   |   | סעיף ו | 1 | 2 | 3 | 4 | סעיף ו | 1 | 2 | 3 | 4 | סעיף ו | 1 | 2 | 3 | 4 |
| סעיף ז |   |   |   |   | סעיף ז | 1 | 2 | 3 | 4 | סעיף ז | 1 | 2 | 3 | 4 | סעיף ז | 1 | 2 | 3 | 4 |

| תרגום המונח                     |                                        |                          | המונח                  |
|---------------------------------|----------------------------------------|--------------------------|------------------------|
| אנגלית                          | רוסית                                  | ערבית                    |                        |
| פרק ראשון – אלגברה לינארית      |                                        |                          |                        |
| infinite number of solutions    | бесконечное число решений              | عدد غير نهائيّ من الحلول | אינסוף פתרונות         |
| base                            | основание, базис                       | أساس                     | בסיס                   |
| dual                            | Двойственность                         | مُزدَوِّج                | דואלי                  |
| determinant                     | Определитель, детерминант              | المُحدِّدات              | דטרמיננטה              |
| rank                            | Степень, ранг                          | درجة                     | דרגה                   |
| vector                          | Вектор                                 | مُتَّجِه                 | וקטור                  |
| one-one correspondence          | Инъекция, одно-однозначное отображение | ذات قيمة واحدة           | חד-חד-ערכי             |
| transformation                  | отображение                            | تحوّل                    | טרנספורמציה            |
| matrix                          | матрица                                | مصفوفة                   | מטריצה                 |
| inverse matrix                  | обратная матрица                       | مصفوفة معكوسة            | מטריצה הופכית          |
| invertible matrix               | Невырожденная матрица                  | مصفوفة يمكن عكسها        | מטריצה הפיכה           |
| dimension                       | Размерность                            | بُعد                     | ממד                    |
| system of equations             | Система уравнений                      | هيئة مُعادلات            | מערכת משוואות          |
| homogeneous system of equations | однородная система уравнений           | هيئة مُعادلات متجانسة    | מערכת משוואות הומוגנית |
| coefficients                    | коэффициенты                           | مُعَامِلَات              | מקדמים                 |
| space                           | пространство                           | بُعد                     | מרחב                   |
| slack variable                  | дополнительная переменная              | مُتغيّر خامل             | משתנה סרק              |
| scalar                          | скаляр                                 | عدديّ                    | סקלר                   |
| onto                            | Сюръекция                              | عُلَيَّا                 | על                     |
| eigenvalue                      | собственное число                      | قيمة ذاتيّة              | ערך עצמי               |

| תרגום המונח                  |                                                                               |                                   | המונח                       |
|------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------|
| אנגלית                       | רוסית                                                                         | ערבית                             |                             |
| פרק שני - תכנון לינארי       |                                                                               |                                   |                             |
| constraint                   | ограничение, неравенство                                                      | إجبار                             | אילוץ                       |
| demand                       | спрос                                                                         | الطلب                             | ביקוש                       |
| primal problem               | Прямая задача                                                                 | مشكلة بدائيّة                     | בעיה פרימלית                |
| transportation problem       | Транспортная задача                                                           | مشكلة النقل                       | בעיית תובלה                 |
| supply                       | Предложение                                                                   | العرض                             | היצע                        |
| simplex tableau              | симплекс-таблица                                                              | جدول بسيط                         | טבלת סימפלקס                |
| dummy target                 | "свалка" —<br>дополнительный пункт,<br>куда свозят все лишнее<br>производство | هدف وهمي                          | יעד דמה                     |
| free variable                | неограниченный по знаку                                                       | مُتغيّر حرّ ( متغيّر غير مُرمّز ) | לא מוגבל בסימן              |
| dummy source                 | дополнительный<br>(искусственный)<br>производитель                            | مصدر وهمي                         | מקור דמה                    |
| basic variable               | базисная переменная                                                           | مُتغيّر أساسي                     | משתנה בסיסי                 |
| cost                         | стоимость                                                                     | تكلفة                             | עלות                        |
| objective function           | целевая функция                                                               | وظيفة هادفة                       | פונקציית מטרה               |
| parameter                    | Параметр                                                                      | بارامتر                           | פרמטר                       |
| optimal solution             | оптимальное решение                                                           | الحلّ الأمثل                      | פתרון אופטימלי              |
| bounded solution             | ограниченное решение                                                          | حلّ مسدود                         | פתרון חסום                  |
| unique solution              | единственное решение                                                          | حلّ وحيد                          | פתרון יחיד                  |
| vertex                       | вершина                                                                       | رأس                               | קודקוד                      |
| linear combination           | линейная комбинация                                                           | مزيج خطّي                         | קומבינציה ליניארית          |
| northwestern corner method   | Метод северо-западного угла                                                   | طريقة الركن الشمالي الغربي        | שיטת "הפינה הצפונית-מערבית" |
| Vogel's approximation method | Метод аппроксимации<br>Фогеля                                                 | ل غوفب يريقة تقيرط                | שיטת "הקירוב של ווגל"       |
| feasible solutions set       | область допустимых<br>решений                                                 | مجال الحلول المُمكنة              | תחום הפתרונות האפשריים      |
| linear programming           | Линейное<br>программирование                                                  | البرمجة الخطيّة                   | תכנון ליניארי               |
| linear dependence            | линейная зависимость                                                          | الاعتماد الخطّي                   | תלות ליניארית               |