

Государство Израиль

Министерство просвещения

Тип экзамена: на аттестат зрелости

Время проведения экзамена: **поздняя зима 2021 года**

Номер вопросника: **035581**

Приложение: листы с формулами

для уровня в 5 единиц обучения

Перевод на русский язык (5)

## מועד חורף מאוחר

מדינת ישראל

משרד החינוך

סוג הבחינה: בגרות

מועד הבחינה: **חורף מאוחר תשפ"א, 2021**

מספר השאלון: **035581**

נספח: דפי נוסחאות

ל-5 יחידות לימוד

תרגום לרוסית (5)

### Математика

5 единиц обучения – первый вопросник

### מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

#### Указания экзаменуемым

а. Продолжительность экзамена: 3 часа 30 минут

б. Строение вопросника и ключ к оценке:

В этом вопроснике три раздела, и в них восемь вопросов.

Раздел первый – алгебра и теория вероятности

Раздел второй – геометрия и тригонометрия на плоскости

Раздел третий – дифференциальное и интегральное исчисление полиномов, функций, содержащих корни, рациональных функций и тригонометрических функций

Вы должны ответить на пять вопросов по выбору –

$5 \times 20 = 100$  баллов

в. Разрешенный вспомогательный материал:

1. Калькулятор без графического дисплея. При работе с калькулятором, в котором есть возможности программирования, запрещается использовать эти возможности. Использование калькулятора с графическим дисплеем или возможностей программирования может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

2. Листы с формулами (прилагаются).

3. Двухязычный словарь.

г. Особые указания:

1. Не переписывайте вопрос; отметьте только его номер.

2. Начинайте ответ на каждый вопрос с новой страницы.

Запишите в тетради этапы решения (также и в том случае, когда вычисления производились с помощью калькулятора).

Объясните все свои действия, включая вычисления, подробно, ясно и упорядоченно. Недостаточно подробная запись решения может привести к тому, что оценка за экзамен будет снижена или экзамен будет аннулирован.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טייטה" בראש כל עמוד המשמש טייטה.

כתוב טייטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Пишите только в экзаменационной тетради. Напишите слово «טייטה» в начале каждой страницы, отведенной вами под черновик. Выполнение любых черновых записей на листах, не относящихся к экзаменационной тетради, может привести к тому, что экзамен будет аннулирован!

Желаем успеха!

#### הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות

רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

עליך לענות על חמש שאלות לבחירתך –

$20 \times 5 = 100$  נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות

התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות

במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

2. דפי נוסחאות (מצורפים).

3. מילון עברי-לועזי/לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

1. אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

2. התחל כל שאלה בעמוד חדש.

רשום במחברת את שלבי הפתרון,

גם כאשר החישובים מתבצעים

בעזרת מחשבון. הסבר את כל

פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה

ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה

בציון או לפסילת הבחינה.

בהצלחה!

### Вопросы

**Обратите внимание:** объясняйте все ваши действия, включая вычисления, подробно и ясно.

**Недостаточная детализация может снизить вашу оценку или привести к аннулированию экзамена.**

Ответьте на пять из вопросов 1-8 (за каждый вопрос – 20 баллов).

**Обратите внимание:** если вы ответите более чем на пять вопросов, будут проверены только первые пять из ответов в вашей тетради.

### Раздел первый – алгебра и теория вероятности

1. Йоав и Дани отправились в путь на велосипедах в один и тот же момент времени. Они ехали по прямому маршруту, который начался в точке А и закончился в точке В . Каждый из них ехал по этому маршруту с постоянной скоростью. Йоав прибыл в точку В и сразу же отправился обратно по тому же маршруту в точку А . Когда Йоав ехал обратно из В в А и оказался на середине маршрута АВ , Дани прибыл в точку В .
- (\*) Каково отношение скорости Йоава к скорости Дани? Обоснуйте свой ответ.
- Через 40 минут после начала движения, когда Йоав находился на обратном пути из В в А , Йоав и Дани встретились.
- (\*) Выразите длину маршрута АВ при помощи скорости Дани.
- Через 30 минут после начала движения Йоав еще не доехал до точки В , а расстояние, на котором Дани находился от точки А , было на 5 км больше, чем расстояние Йоава от точки В .
- (\*) Найдите длину маршрута АВ .
- (\*) Сколько времени прошло с момента, когда Дани и Йоав выехали из точки А , и до того момента, когда расстояние между ними составляло 2 км? Найдите два из трех возможных вариантов.

2. Последовательность  $a_n$  – геометрическая прогрессия, в которой для любого натурального  $n$  выполняется правило:  $3a_{n+2} + 5a_{n+1} - 2a_n = 0$ .

Дано, что  $a_1 \neq 0$ .

(\*) Найдите два возможных значения знаменателя прогрессии  $a_n$ .

Обозначим члены этой прогрессии, выполняющей данное правило и **расходящейся** [לא מתכנסת], как  $b_1, b_2, b_3, \dots$ .

Обозначим члены этой прогрессии, выполняющей данное правило и **сходящейся** [מתכנסת], как  $c_1, c_2, c_3, \dots$ .

(\*) Объясните, почему прогрессия  $b_1c_1, b_2c_2, b_3c_3, \dots$  является сходящейся геометрической прогрессией.

Дано:  $b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 + \dots = 15$

$$b_1 = c_1 = m$$

(\*) Найдите  $m$  (укажите две возможности).

Ответьте на вопрос пункта (т) для меньшего из двух возможных  $m$ , найденных вами в пункте (\*).

(т) Дано:  $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_k = 1,705$

Найдите  $k$ .

3. В кувшине есть шары только трех цветов: **красного, желтого, синего**.

Дано:

Вероятность вытащить красный шар равна  $\frac{5}{8}$ .

Число желтых шаров в 3 раза больше числа синих шаров.

$\frac{4}{5}$  красных шаров, находящихся в кувшине, и  $\frac{8}{9}$  желтых шаров, находящихся в кувшине, **шероховатые**, а остальные шары в кувшине – **гладкие**.

Случайным образом извлекли шар из кувшина и вернули его в кувшин.

Это действие (извлечение и возвращение шара) произвели 8 раз.

(\*) Какова вероятность того, что в точности 3 из извлеченных шаров будут **шероховатыми**?

Ответьте на вопрос пункта (а) для кувшина, в котором 32 шара.

(а) Случайным образом из кувшина извлекли один за другим 2 шара, не возвращая их в кувшин.

(1) Какова вероятность того, что два извлеченных шара были различных цветов?

(2) Известно, что два извлеченных шара были различных цветов. Какова вероятность того, что первый извлеченный шар был красного цвета?

Ответьте на вопрос пункта (а) для кувшина, в котором  $n$  шаров.

Дано:  $50 < n < 100$ .

(а) Найдите  $n$  (два возможных значения).

## Раздел второй – геометрия и тригонометрия на плоскости

4. На чертеже справа изображены две окружности, касающиеся друг друга внешним образом.

Центры окружностей – точки  $O_1$  и  $O_2$ ,  
 а их радиусы –  $R_1$  и  $R_2$  соответственно.

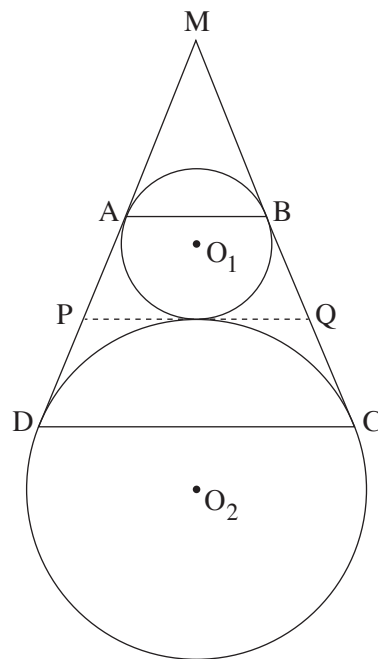
Из точки  $M$ , находящейся вне обеих окружностей, выходят  
 две прямые, касательные к окружности  $O_1$  в точках  $A$  и  $B$   
 и к окружности  $O_2$  – в точках  $D$  и  $C$ ,  
 как показано на чертеже.

Касательная в общей точке обеих окружностей пересекает  
 прямые  $MD$  и  $MC$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно.

- (а) Докажите, что четырехугольник  $ABCD$  является  
 равнобедренной трапецией.  
 (б) Докажите, что  $PQ$  равен боковой стороне  
 трапеции  $ABCD$ .  
 (в) Докажите, что  $\angle O_1 Q O_2 = 90^\circ$ .

Дано:  $R_1 = 4$ ,  $R_2 = 9$

- (г) Найдите  $PQ$ .



5. На приведенном ниже чертеже изображен остроугольный треугольник  $ABC$ , вписанный  
 в окружность, радиус которой  $R$ .

Касательная к этой окружности в точке  $C$  пересекает продолжение отрезка  $AB$  в точке  $D$ .

Дано, что радиус окружности, описанной вокруг треугольника  $ACD$ , равен  $2R$ .

Обозначим:  $\angle BAC = \alpha$ .

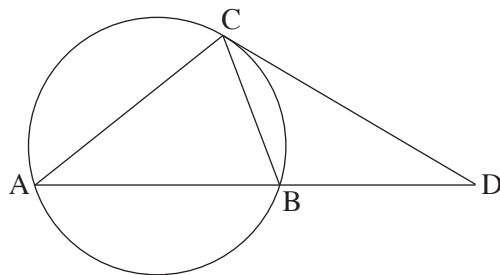
- (а) Выразите  $BD$  при помощи  $R$  и  $\alpha$ .

Дано:  $\frac{CD}{BD} = \frac{3}{2}$ .

- (б) Найдите  $\alpha$ .

Дано: площадь треугольника  $CBD$  равна 27.

- (в) Найдите  $R$ .



**Раздел третий – дифференциальное и интегральное исчисление полиномов,  
функций, содержащих корни, рациональных функций  
и тригонометрических функций**

6. Дана функция  $f(x) = \cos^3(x) \cdot \sin(x)$  в области  $0 \leq x \leq \pi$ .

(א) Найдите координаты точек экстремума функции  $f(x)$  и определите их тип.

(ב) Начертите схематический график функции  $f(x)$ .

Дана функция  $g(x) = a \cdot f(x)$ .  $a > 0$  – параметр.

(ג) Выразите при помощи  $a$  уравнение прямой, касательной к графику функции  $g(x)$  в точке, в которой  $x = 0$ .

Прямая, которую вы нашли в пункте (ג), не пересекает график функции  $g(x)$

в дополнительной точке.

Дано, что площадь фигуры, заключенной между графиком функции  $g(x)$ , прямой, которую вы нашли в пункте (ג), и прямой  $x = \frac{\pi}{2}$ , равна  $\left(\frac{\pi^2}{2} - 1\right)$ .

(ד) Найдите  $a$ .

7. Дана функция  $f(x) = \frac{x+a}{\sqrt{x}}$ .  $a$  – параметр.

(\*) Найдите область определения функции  $f(x)$ .

(\*) (1) При каких значениях параметра  $a$  у функции  $f(x)$  нет точек экстремума?

Обоснуйте свой ответ.

(2) Для случаев, когда у функции  $f(x)$  есть точка экстремума, выразите при помощи  $a$  ее координаты и определите ее тип.

(\*) Начертите схематический график функции  $f(x)$  отдельно для каждой из областей i-iii параметра  $a$ , приведенных ниже:

i  $a > 0$

ii  $a < 0$

iii  $a = 0$

Дана функция  $g(x) = f(x) - b$ .  $b$  – параметр.

Дано, что график функции  $g(x)$  пересекает ось  $x$  в двух точках.

(\*) (1) Найдите область значений параметра  $a$ . Обоснуйте свой ответ.

(2) Выразите область значений параметра  $b$  при помощи  $a$ . Обоснуйте свой ответ.

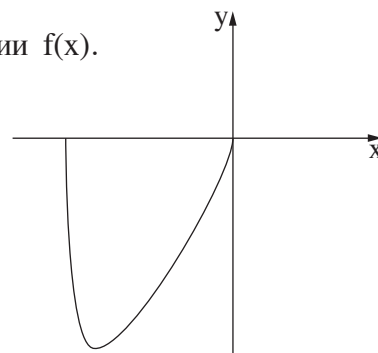
8. Дана функция  $f(x) = x \cdot \sqrt{a - x^2}$ .  $a > 0$  – параметр.

(\*) (1) Выразите при помощи  $a$  область определения функции  $f(x)$ .

(2) Докажите, что функция  $f(x)$  является нечетной.

(3) На чертеже справа изображена часть графика функции  $f(x)$ .

Перенесите чертеж в свою тетрадь и дополните его, так чтобы график функции  $f(x)$  был полностью изображен на нем.



Через точку  $A$ , находящуюся на графике функции  $f(x)$  в первом квадранте, провели перпендикуляр к оси  $x$ . Этот перпендикуляр пересекает ось  $x$  в точке  $B$ .

Прямая, которая проходит через точку  $A$  и через точку начала координат,  $O$ , пересекает график функции  $f(x)$  еще в одной точке,  $C$ .

Через точку  $C$  проводят перпендикуляр к оси  $x$ . Этот перпендикуляр пересекает ось  $x$  в точке  $D$ .

Дано: максимальная сумма площадей треугольников  $AOB$  и  $COD$  равна  $4\sqrt{2}$ .

(\*) Найдите  $a$ .

**Желаем успеха!**

**בהצלחה!**