

Mathématiques

5 unités d'étude - premier questionnaire

Instructions au candidat

א. Durée de l'examen : trois heures et demie.

ב. Structure du questionnaire et barème de notation :

Ce questionnaire, qui comporte trois parties, est constitué de huit questions.

Première partie — Algèbre et probabilités

Deuxième partie — Géométrie et trigonométrie planes

Troisième partie — Calcul différentiel et intégral de polynômes, de fonctions racines, de fonctions

rationnelles et de fonctions trigonométriques

Répondez à cinq questions au choix — $5 \times 20 = 100$ points

ג. Matériel auxiliaire autorisé :

(1) Calculatrice non graphique. Il est interdit d'utiliser les options de programmation d'une calculatrice programmable.

L'utilisation d'une calculatrice graphique ou des options de programmation d'une calculatrice peut entraîner votre disqualification.

(2) Formulaires (joint au sujet).

(3) Dictionnaire hébreu-langue étrangère / langue étrangère-hébreu.

ד. Instructions supplémentaires :

(1) Ne recopiez pas la question, indiquez seulement son numéro.

(2) Commencez chaque question sur une nouvelle page.

Écrivez dans le cahier d'examen les étapes de la résolution, même lorsque les calculs se font à l'aide de la calculatrice.

Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, en détail et de façon claire et ordonnée.

Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Écrivez dans le cahier d'examen uniquement. Inscrivez "טייטה" en haut de chaque page de brouillon.

Écrire des notes de brouillon sur d'autres feuilles que celles du cahier d'examen, risque d'entraîner votre disqualification.

מתמטיקה

5 יחידות לימוד - שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

עליך לענות על חמש שאלות לבחירתך — $5 \times 20 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

(3) מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טייטה" בראש כל עמוד המשמש טייטה. כתיבת טייטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Bonne chance !

בהצלחה!

Questions

Attention : Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, de manière détaillée et claire.

Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Répondez à cinq des questions 1-8 (20 points par question).

Attention : Si vous répondez à plus de cinq questions, seules les cinq premières réponses de votre copie seront corrigées.

Première partie – Algèbre et probabilités

1. Yoav et Dani sont partis en vélo en même temps. Ils ont roulé sur un parcours rectiligne qui commence en un point A et se termine en un point B .

Chacun d'eux a roulé à vitesse constante tout au long de ce parcours.

Yoav a atteint le point B , puis est immédiatement revenu vers le point A par le même parcours.

Lorsque Yoav revenait du point B au point A et qu'il a atteint le milieu du parcours AB , Dani a atteint le point B .

⌘. Quel est le rapport entre la vitesse de Yoav et la vitesse de Dani ? Justifiez.

40 minutes après qu'ils ont commencé à rouler, lorsque Yoav revenait du point B au point A , Yoav et Dani se sont rencontrés.

Ⓐ. Exprimez la longueur du parcours AB en fonction de la vitesse de Dani.

30 minutes après qu'ils ont commencé à rouler, Yoav n'avait pas encore atteint le point B , et la distance séparant Dani du point A était supérieure de 5 km à la distance séparant Yoav du point B .

Ⓐ. Déterminez la longueur du parcours AB .

Ⓐ. Combien de temps s'est écoulé de l'instant où Yoav et Dani sont partis du point A et jusqu'à ce que la distance qui les séparait soit de 2 km ?

Déterminez deux des trois possibilités.

2. La suite a_n est une suite géométrique vérifiant la relation $3a_{n+2} + 5a_{n+1} - 2a_n = 0$, pour tout n entier naturel.

Il est donné que $a_1 \neq 0$.

א. Déterminez les deux valeurs que peut prendre la raison de la suite a_n .

On note $b_1, b_2, b_3, \dots$ les termes de la suite qui vérifie la relation **et qui n'est pas convergente**.

On note $c_1, c_2, c_3, \dots$ les termes de la suite qui vérifie la relation **et qui est convergente**.

ב. Expliquez pourquoi la suite $b_1c_1, b_2c_2, b_3c_3, \dots$ est une suite géométrique convergente.

Données : $b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 + \dots = 15$

$$b_1 = c_1 = m$$

ג. Déterminez m (donnez les deux possibilités).

Répondez à l'article τ pour la plus petite valeur de m parmi les deux valeurs possibles que vous avez déterminées à l'article γ .

ד. Donnée : $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_k = 1705$

Déterminez k .

3. Une urne contient des boules de trois couleurs uniquement : **rouge, jaune, bleue**.

Données :

la probabilité de tirer une boule rouge est de $\frac{5}{8}$.

Le nombre de boules jaunes est 3 fois plus grand que le nombre de boules bleues.

$\frac{4}{5}$ des boules rouges se trouvant dans l'urne ainsi que $\frac{8}{9}$ des boules jaunes qui s'y trouvent sont **rugueuses**, et le reste des boules se trouvant dans l'urne sont **lisses**.

On a tiré au hasard une boule de l'urne, puis on l'a remise dans l'urne. Cette opération (tirage au hasard puis remise) a été réalisée 8 fois.

א. Quelle est la probabilité qu'exactement 3 boules parmi celles que l'on a tirées soient **rugueuses** ?

Répondez à l'article $\beth$ pour une urne contenant 32 boules.

ב. On a tiré au hasard de l'urne 2 boules l'une après l'autre (sans remise).

(1) Quelle est la probabilité que les deux boules qui ont été tirées soient de couleurs différentes ?

(2) On sait que les deux boules qui ont été tirées sont de couleurs différentes. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit rouge ?

Répondez à l'article γ pour une urne contenant n boules.

Donnée : $50 < n < 100$.

ג. Déterminez n (les deux possibilités).

suite en page 4 ►

Deuxième partie – Géométrie et trigonométrie planes

4. La figure ci-contre représente deux cercles tangents extérieurement.

Les centres des cercles sont les points O_1 et O_2 ,

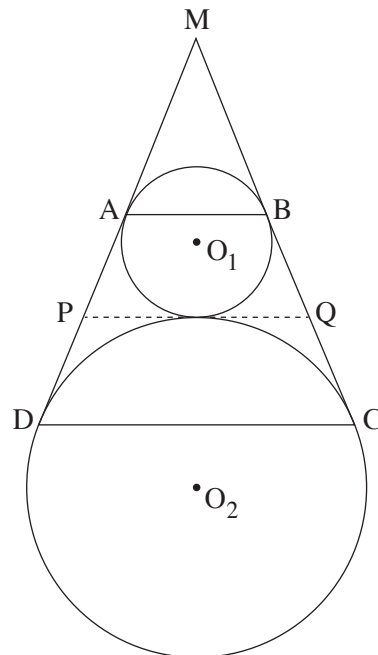
et leurs rayons sont respectivement R_1 et R_2 .

Deux droites tangentes au cercle O_1 aux points A et B,

et au cercle O_2 aux points D et C, sont issues

d'un point M situé en dehors des deux cercles, tel que cela est décrit sur la figure.

La tangente au point commun aux deux cercles coupe respectivement les droites MD et MC aux points P et Q.



- א. Démontrez que le quadrilatère ABCD est un trapèze isocèle.

- ב. Démontrez que PQ est égal à l'un des côtés non-parallèles du trapèze ABCD.

- ג. Démontrez que $\angle O_1 Q O_2 = 90^\circ$.

Données : $R_1 = 4$, $R_2 = 9$.

- ד. Déterminez PQ.

5. La figure ci-contre représente un triangle acutangle ABC inscrit dans un cercle de rayon R.

La tangente au cercle au point C coupe le prolongement du segment AB en un point D.

Il est donné que le rayon du cercle dans lequel est inscrit le triangle ACD est $2R$.

On note : $\angle BAC = \alpha$.

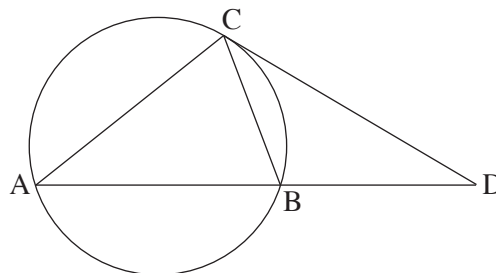
- א. Exprimez BD en fonction de R et de α .

Donnée : $\frac{CD}{BD} = \frac{3}{2}$.

- ב. Déterminez α .

Donnée : l'aire du triangle CBD vaut 27.

- ג. Déterminez R.



Troisième partie – Calcul différentiel et intégral de polynômes, de fonctions racines, de fonctions rationnelles et de fonctions trigonométriques

6. Soit la fonction $f(x) = \cos^3(x) \cdot \sin(x)$ définie sur l'intervalle $0 \leq x \leq \pi$.

- א. Déterminez les coordonnées des points d'extremum de la fonction $f(x)$, puis déterminez leur type.
- ב. Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.

Soit la fonction $g(x) = a \cdot f(x)$. $a > 0$ est un paramètre.

- ג. Exprimez, en fonction de a , l'équation de la droite tangente au graphe de la fonction $g(x)$ au point pour lequel $x = 0$.

La droite que vous avez déterminée à l'article ג ne coupe le graphe de la fonction $g(x)$ en aucun point supplémentaire.

Il est donné que l'aire délimitée par le graphe de la fonction $g(x)$, par la droite que vous avez déterminée à l'article ג et par la droite $x = \frac{\pi}{2}$, vaut $\left(\frac{\pi^2}{2} - 1\right)$.

- ד. Déterminez a .

7. Soit la fonction $f(x) = \frac{x+a}{\sqrt{x}}$. a est un paramètre.

א. Déterminez le domaine de définition de la fonction $f(x)$.

ב. (1) Pour quelles valeurs du paramètre a , la fonction $f(x)$ n'admet pas de points d'extremum ? Justifiez.

(2) Pour les cas où la fonction $f(x)$ admet un point d'extremum, exprimez ses coordonnées en fonction de a , puis déterminez son type.

ג. Tracez séparément une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$ pour chacun des intervalles i-iii du paramètre a suivants :

i. $a > 0$

ii. $a < 0$

iii. $a = 0$

Soit la fonction $g(x) = f(x) - b$. b est un paramètre.

Il est donné que le graphe de la fonction $g(x)$ coupe l'axe des abscisses en deux points.

ד. (1) Déterminez l'intervalle du paramètre a . Justifiez.

(2) Exprimez l'intervalle du paramètre b en fonction de a . Justifiez.

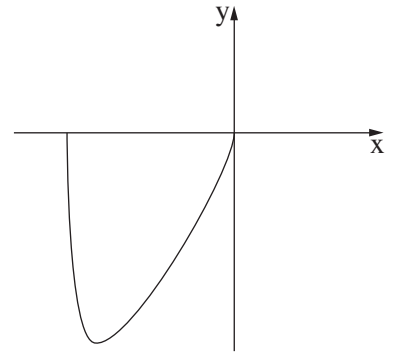
8. Soit la fonction $f(x) = x \cdot \sqrt{a - x^2}$. $a > 0$ est un paramètre.

א. (1) Exprimez le domaine de définition de la fonction $f(x)$ en fonction de a .

(2) Démontrez que la fonction $f(x)$ est impaire.

(3) Le graphe ci-contre représente une partie du graphe de la fonction $f(x)$.

Recopiez le graphe dans votre cahier, puis complétez-le de sorte qu'il représente la totalité du graphe de la fonction $f(x)$.



On trace une perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par le point A qui se trouve sur le graphe de la fonction $f(x)$ dans le premier quadrant.

La perpendiculaire coupe l'axe des abscisses en un point B .

La droite passant par le point A et par l'origine O du repère, coupe le graphe de la fonction $f(x)$ en un point supplémentaire C .

On trace une perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par le point C .

Cette perpendiculaire coupe l'axe des abscisses en un point D .

Donnée : la somme maximale des aires des triangles AOB et COD vaut $4\sqrt{2}$.

ב. Déterminez a .

Bonne chance!

Tous droits réservés à l'État d'Israël.
Toute copie ou publication est interdite sans l'autorisation du
Ministère de l'Éducation.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך