

Mathématiques

5 unités d'étude – deuxième questionnaire

Instructions au candidat

- א. Durée de l'examen : deux heures et quart.
- ב. Structure du questionnaire et barème de notation :
Ce questionnaire comporte deux parties constituées de cinq questions.
Première partie — Géométrie analytique, vecteurs, trigonométrie dans l'espace, nombres complexes.
Deuxième partie — Croissance et décroissance, fonctions puissance, fonctions exponentielles et logarithmiques.
Répondez à trois questions au choix — $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$ points.

- ג. Matériel auxiliaire autorisé :
(1) Calculatrice non graphique. Il est interdit d'utiliser les options de programmation d'une calculatrice programmable.
L'utilisation d'une calculatrice graphique ou des options de programmation d'une calculatrice peut entraîner votre disqualification.
(2) Formulaires (jointes au sujet).
(3) Dictionnaire hébreu-langue étrangère / langue étrangère-hébreu.

- ד. Instructions supplémentaires :
(1) Ne recopiez pas la question, indiquez seulement son numéro.
(2) Commencez chaque question sur une nouvelle page.
Écrivez dans le cahier d'examen les étapes de la résolution, même lorsque les calculs se font à l'aide d'une calculatrice.
Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, en détail et de façon claire et ordonnée.
Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Écrivez dans le cahier d'examen uniquement.
Inscrivez "טייטה" en haut de chaque page de brouillon.
Écrire des notes de brouillon sur d'autres feuilles que celles du cahier d'examen, risque d'entraîner votre disqualification.

Bonne chance !

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון שני

הוראות לנבחן

- א. משך הבחינה: שעתיים ורבע.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.
פרק ראשון — גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים
פרק שני — גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות
עליך לענות על שלוש שאלות לבחירתך — $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$ נקודות.

- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
(2) דפי נוסחאות (מצורפים).
(3) מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

- ד. הוראות מיוחדות:
(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טייטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

בהצלחה!

Questions

Attention : Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, de manière détaillée et claire.

Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Répondez à trois des questions 1-5 ($33\frac{1}{3}$ points par question).

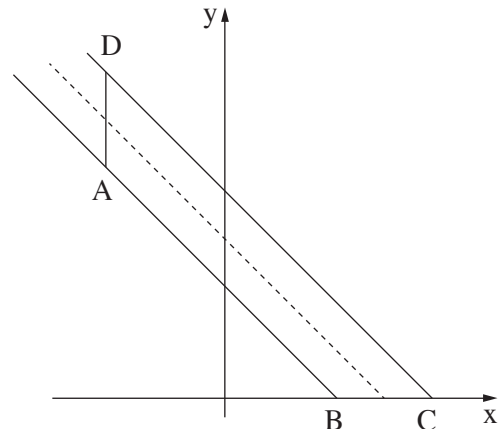
Attention : Si vous répondez à plus de trois questions, seules les trois premières réponses de votre copie seront corrigées.

Première partie - Géométrie analytique, vecteurs, trigonométrie dans l'espace et nombres complexes

1. ABCD est un trapèze ($AB \parallel DC$).

Données : la distance séparant les bases AB et DC du trapèze vaut $\sqrt{2}$,
le segment médian du trapèze ABCD repose sur la droite $x + y - 4 = 0$.

- ⌘. Déterminez les équations des droites sur lesquelles reposent les bases du trapèze.



Donnée : le côté BC repose sur l'axe des abscisses.

On trace une parabole canonique $y^2 = 2px$ ($p > 0$), telle que les sommets A et D du trapèze se trouvent sur la directrice de la parabole, et que le foyer de la parabole se trouve au sommet B ou au sommet C.

- ⌘. (1) Quelle est l'équation de la parabole pour laquelle le trapèze ABCD est le plus grand des deux trapèzes possibles ? Justifiez.
- (2) Quelle est l'équation de la parabole pour laquelle le trapèze ABCD est le plus petit des deux trapèzes possibles ?
- ⌘. On trace une droite parallèle à l'axe des abscisses et qui coupe les deux paraboles que vous avez déterminées à l'article ⌘ en deux points, E et F.
- Déterminez l'équation du lieu géométrique sur lequel se trouvent les milieux des segments EF ainsi formés.

2. ABC est un triangle.

On note : $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$.

Données : A(0, 2, -1) , B(-3, 2, 2) ,

le point D(-2, 3, 1) se trouve sur le segment BC de sorte que $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v}$.

⌘. (1) Déterminez les coordonnées du point C , puis démontrez que le triangle ABC est un triangle rectangle.

(2) Déterminez l'équation du plan ABC .

Le point E se trouve dans le plan ABC de sorte que ABEC est un rectangle. Le point M est l'intersection des diagonales de ce rectangle. S est un point tel que MS est perpendiculaire au plan ABEC .

⌘. (1) Déterminez la représentation paramétrique de la droite MS , puis expliquez pourquoi pour tout point S de ce type, SABEC est une pyramide droite.

(2) Donnez un exemple de coordonnées d'un point S tel qu'il est décrit au sous-article ⌘(1). Calculez la mesure de l'angle SAB pour le point S que vous avez déterminé.

(3) Existe-t-il, pour le point S que vous avez déterminé, un point supplémentaire P tel que PABEC soit une pyramide droite vérifiant $\sphericalangle SAB = \sphericalangle PAB$?

Si oui, déterminez ses coordonnées. Si non, justifiez.

3. Soit l'équation $i \cdot z^6 = \frac{1}{64}$ (z est un nombre complexe).

⌘. Déterminez toutes les solutions de l'équation donnée.

Les solutions de l'équation donnée correspondent aux sommets d'un polygone convexe dans le plan de Gauss.

⌘. Démontrez que pour chacun des sommets du polygone il existe exactement un sommet tel que la droite qui les relie passe par l'origine du repère.

On multiplie chacune des solutions de l'équation donnée par un nombre complexe w constant.

⌘. Expliquez pourquoi la somme des nombres obtenus vaut zéro.

Donnée : $w = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

⌘. Donnez une équation dont les solutions sont 12 nombres : les solutions de l'équation donnée au début de l'exercice ainsi que les nombres obtenus suite à la multiplication par w .

Deuxième partie – Croissance et décroissance, fonctions puissance, fonctions exponentielles et logarithmiques

4. Soit la fonction $f(x) = \frac{-4}{e^{2x} - 4e^x + 3}$.

- ⌘. (1) Déterminez le domaine de définition de la fonction $f(x)$.
- (2) Déterminez les équations des asymptotes de la fonction $f(x)$ qui sont perpendiculaires aux axes.
- (3) Déterminez les coordonnées des points d'extremum de la fonction $f(x)$, puis déterminez leur type (s'il en existe).
- (4) Déterminez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction $f(x)$.
- (5) Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.

⌘. Expliquez pourquoi tout $b < 0$ vérifie : $\int_{b-3}^b f(x) dx < -4$.

Soit la fonction $g(x) = \frac{k}{f(x)}$, dont le domaine de définition est identique au domaine de définition de la fonction $f(x)$. k est un paramètre.

Il est donné que la fonction $g(x)$ admet un point de minimum.

⌘. Quel est l'intervalle des valeurs possibles de k ? Justifiez.

5. Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{(\ln(x))^3 - 1} + 1$.

- ⌘. (1) Déterminez le domaine de définition de la fonction $f(x)$.
- (2) Déterminez les équations des asymptotes de la fonction $f(x)$ qui sont perpendiculaires aux axes.
- (3) Déterminez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction $f(x)$ (s'il en existe).
- (4) Déterminez les coordonnées des points d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ avec les axes (s'il en existe).
- (5) Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.

⌘. La droite $y = k$ ne coupe pas le graphe de la fonction $f(x)$ (k est un paramètre). Déterminez k . Justifiez.

⌘. On définit $T(x) = \int_{e^{-1}}^x f(x) dx$ $e^{-1} \leq x < e$.

(1) Voici trois valeurs de x , (I-III). Pour laquelle de ces valeurs, la valeur de $T(x)$ est-elle la plus grande ? Justifiez.

I) $x = \frac{1}{2}$ II) $x = 1$ III) $x = 2$

(2) Expliquez pourquoi tout $e^{-1} \leq x < e$ vérifie : $T(x) < 1$.

Bonne chance !

Tous droits réservés à l'État d'Israël.

Toute copie ou publication est interdite sans l'autorisation du Ministère de l'Éducation.

בהצלחה !

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך