

## Mathématiques

### 5 unités d'étude - premier questionnaire

#### Instructions au candidat

א. Durée de l'examen : trois heures et demie.

ב. Structure du questionnaire et barème de notation :

Ce questionnaire comporte trois parties constituées de huit questions.

Première partie — Algèbre et probabilités

Deuxième partie — Géométrie et trigonométrie planes

Troisième partie — Calcul différentiel et intégral de polynômes, de fonctions racines, de fonctions

rationnelles et de fonctions trigonométriques

Répondez à cinq questions au choix —  $5 \times 20 = 100$  points

ג. Matériel auxiliaire autorisé :

(1) Calculatrice non graphique. Il est interdit d'utiliser les options de programmation d'une calculatrice programmable.

L'utilisation d'une calculatrice graphique ou des options de programmation d'une calculatrice peut entraîner votre disqualification.

(2) Formulaires (jointes au sujet).

(3) Dictionnaire hébreu-langue étrangère / langue étrangère-hébreu.

ד. Instructions supplémentaires :

(1) Ne recopiez pas la question, indiquez seulement son numéro.

(2) Commencez chaque question sur une nouvelle page.

Écrivez dans le cahier d'examen les étapes de la résolution, même lorsque les calculs se font à l'aide de la calculatrice.

Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, en détail et de façon claire et ordonnée.

Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Écrivez dans le cahier d'examen uniquement. Inscrivez "טייטה" en haut de chaque page de brouillon.

Écrire des notes de brouillon sur d'autres feuilles que celles du cahier d'examen, risque d'entraîner votre disqualification.

## מתמטיקה

### 5 יחידות לימוד - שאלון ראשון

#### הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

עליך לענות על חמש שאלות לבחירתך —  $5 \times 20 = 100$  נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

(3) מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טייטה" בראש כל עמוד המשמש טייטה. כתיבת טייטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Bonne chance !

בהצלחה!

## Questions

**Attention :** Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, de manière détaillée et claire.

Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Répondez à cinq des questions 1-8 (20 points par question).

**Attention :** Si vous répondez à plus de cinq questions, seules les cinq premières réponses de votre copie seront corrigées.

### Première partie – Algèbre et probabilités

1. Deux coursiers, Eyal et Barak, sont partis l'un vers l'autre à 8:00 afin de livrer un colis.

Eyal est parti de la ville A et Barak est parti de la ville B .

Après que Eyal a parcouru  $\frac{1}{6}$  du trajet vers la ville B , il s'est rendu compte qu'il a oublié le colis dans la ville A . Il est revenu à la ville A , a récupéré le colis, puis est immédiatement reparti vers la ville B . Eyal a tout le temps roulé à vitesse constante.

Barak a lui aussi roulé à une vitesse constante, supérieure de 20 % à la vitesse à laquelle Eyal a roulé.

Barak et Eyal se sont rencontrés en un point situé à 75 km de la ville A .

⌘. Déterminez la longueur du trajet séparant les deux villes.

Eyal et Barak ont roulé sur des routes inter-urbaines sur lesquelles la vitesse de conduite autorisée se situe entre 50 et 110 km/h. Aussi bien Eyal que Barak ont roulé à une vitesse autorisée.

Ⓐ. (1) Est-il possible qu'Eyal et Barak se soient rencontrés à 9:40 ? Justifiez.

(2) Est-il possible qu'Eyal et Barak se soient rencontrés à 10:00 ? Justifiez.

2.  $a_n$  est une suite géométrique infinie de raison  $q$ .

Donnée :  $0 < a_1$  ,  $0 < q < 1$ .

$b_n$  est une suite géométrique infinie croissante de raison  $r$ .

Donnée :  $b_1 = a_6$ .

La suite  $c_n$  est définie ainsi :  $c_n = \frac{a_{n+5}}{b_n}$ .

- ⌘. Expliquez pourquoi tous les termes des suites  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$  sont positifs.
  - ⌘. Démontrez que  $c_n$  est une suite géométrique, puis déterminer  $c_1$ .
  - ⌘. (1) Expliquez pourquoi la raison de la suite  $c_n$  est supérieure à 0 et inférieure à 1.
  - (2) Données : la somme de la suite  $c_n$  vaut  $\frac{6}{5}$ ,  $\frac{b_2}{a_8} = 18$ .
- Déterminez  $q$  et  $r$ .

3. La probabilité qu'un enfant né dans la famille Lévi ait les cheveux bouclés est  $x$ .

La probabilité qu'un enfant né dans la famille Lévi ait les yeux marrons est  $2x$ .

La probabilité que les yeux d'un enfant né dans la famille Lévi soient marrons, sachant que ses cheveux sont bouclés, est 1,5 fois inférieure à la probabilité que ses cheveux ne soient pas bouclés sachant que ses yeux sont marrons.

Yonathan est un des enfants de la famille Lévi.

- ⌘. (1) Montrez que la probabilité que les yeux de Yonathan soient marrons et que ses cheveux soient bouclés est  $\frac{1}{2}x$ .
  - (2) Déterminez la probabilité que les cheveux de Yonathan soient bouclés, sachant que ses yeux sont marrons.
  - ⌘. (1) Exprimez en fonction de  $x$  la probabilité que les cheveux de Yonathan ne soient pas bouclés et également que ses yeux ne soient pas marrons.
  - (2) Donnée :  $x = 0,2$ .
- Quatre enfants exactement sont nés dans la famille Lévi.
- Quelle est la probabilité qu'au moins trois des quatre enfants de la famille Lévi aient les cheveux bouclés et les yeux marrons ?

## Deuxième partie – Géométrie et trigonométrie planes

4. La droite AD est tangente à un cercle en un point A .

Le point B se trouve sur le cercle de sorte que le segment BD passe par le centre O du cercle et coupe le cercle en un point supplémentaire E .

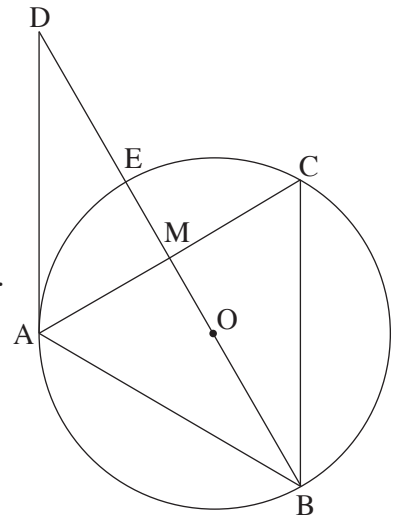
Le point C se trouve sur le cercle de sorte que  $BC \parallel AD$  .

Les droites BD et AC se coupent en un point M (voir figure).

- א. Démontrez que  $AB = AC$  .

Donnée : AE est la bissectrice de l'angle MAD .

- ב. Démontrez que  $BM \perp AC$  .  
ג. Démontrez que la longueur du segment AE est égale au rayon du cercle.  
ד. Démontrez que ABCD est un losange.



5. ABC est un triangle obtusangle ( $\angle BAC > 90^\circ$ ) .

Données :  $AB + AC = 4a$  ( a un paramètre),

$$AB : AC = 3 : 5 ,$$

l'aire du triangle ABC est  $\frac{15\sqrt{3}}{16}a^2$  .

- א. (1) Calculez la mesure de l'angle BAC .  
(2) Calculez la mesure des angles ABC et ACB .

Dans le cercle dans lequel le triangle ABC est inscrit, il est possible d'inscrire un pentagone régulier dont l'aire vaut 100 .

- ב. Calculez a .

**Troisième partie – Calcul différentiel et intégral de polynômes,  
de fonctions racines, de fonctions rationnelles  
et de fonctions trigonométriques**

6. Soit la fonction  $f(x) = 6x(x^3 - 1)^3$ , définie pour tout  $x$ .

Répondez aux articles א-ג. Donnez une réponse en laissant deux chiffres après la virgule si cela est nécessaire.

- א. (1) Quelles sont les coordonnées des points d'intersection du graphe de la fonction  $f(x)$  avec les axes ?
- (2) Déterminez les coordonnées des points d'extremum de la fonction  $f(x)$ , puis déterminez leur type (s'il en existe).
- (3) Tracez une esquisse du graphe de la fonction  $f(x)$ .
- (4) Pour quelles valeurs de  $k$  la droite  $y = k$  est tangente au graphe de la fonction  $f(x)$  ?

ב. Soit l'équation  $6x(x^3 - 1)^3 = m$ .  $m$  est un paramètre.

En vous basant sur le graphe de la fonction, déterminez pour quelles valeurs de  $m$  l'équation donnée admet exactement deux solutions positives différentes, et pour quelles valeurs de  $m$  elle admet une solution négative et une solution positive. Justifiez votre réponse.

ג. En vous aidant du graphe que vous avez tracé, déterminez s'il existe un  $a > 0$  pour

lequel l'intégrale  $\int_0^a f(x) dx$  admet une valeur minimale.

Si oui, quelle est la valeur de ce  $a$  ? Justifiez votre réponse.

7. Soit la fonction  $f(x) = 2 \sin^2 x - 1$ , définie pour tout  $x$ .

Répondez aux articles א-ג pour l'intervalle  $-\pi \leq x \leq \pi$ .

- א. (1) Montrez que la fonction  $f(x)$  est une fonction paire.  
 (2) Quelles sont les coordonnées des points d'intersection du graphe de la fonction  $f(x)$  avec les axes ?  
 (3) Déterminez les coordonnées des points d'extremum de la fonction  $f(x)$ , puis déterminez leur type.

Soit la fonction  $g(x) = \frac{\cos 2x (1 - \sin x)}{\sin x - 1}$ .

- א. (1) Quel est le domaine de définition de la fonction  $g(x)$  ?  
 (2) Pour quelle valeur de  $x$ ,  $f(x) = g(x)$  ? Justifiez.  
 (3) La fonction  $g(x)$  admet-elle des asymptotes verticales ? Justifiez.  
 (4) Tracez une esquisse du graphe de la fonction  $g(x)$ .  
 ג. Soit la fonction  $h(x) = -f(x) + b$  ( $b$  est un paramètre), dont le domaine de définition est identique au domaine de définition de la fonction  $f(x)$ .

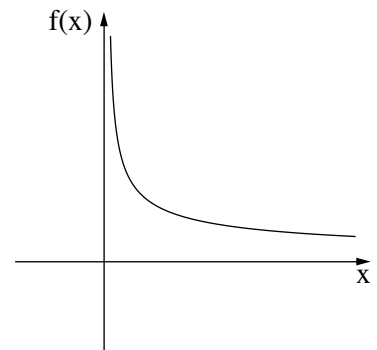
Donnée :  $\int_{-\pi}^0 h(x) dx = \frac{3\pi}{2}$ . Déterminez la valeur du paramètre  $b$ .

8. La figure ci-contre représente le graphe de

la fonction  $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$ , dont le domaine de définition est  $x > 0$ .

Parmi tous les points du graphe de la fonction  $f(x)$ , le point A est le plus proche de l'origine O du repère.

- א. (1) Déterminez les coordonnées du point A.  
 (2) La droite AO est-elle perpendiculaire à la droite tangente au graphe de la fonction  $f(x)$  au point A ? Justifiez.



Soit la fonction  $g(x) = -f(-x)$ , définie sur l'intervalle  $x < 0$ .

Répondez à l'article א pour l'intervalle  $-4 \leq x \leq -1$ .

- א. (1) Parmi tous les points situés sur le graphe de la fonction  $g(x)$  dans l'intervalle donné, quelles sont les coordonnées du point le plus proche de l'origine du repère ?  
 (2) Déterminez les coordonnées du point le plus éloigné de l'origine du repère, parmi tous les points situés sur le graphe de la fonction  $g(x)$  dans l'intervalle donné.

**Bonne chance!**

Tous droits réservés à l'État d'Israël.  
 Toute copie ou publication est interdite sans l'autorisation du  
 Ministère de l'Éducation.

**בהצלחה!**

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל  
 אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך