

Matemáticas

5 unidades de estudio–Primer cuestionario

Instrucciones para el examen

א. Duración del examen: Tres horas y media.

ב. Estructura del cuestionario y clave de la evaluación:

Este cuestionario consta de tres partes.

Primera parte – Álgebra y Probabilidad

– 2x20 – 40 puntos

Segunda parte – Geometría y Trigonometría en el plano

– 1x20 – 20 puntos

Tercera parte – Cálculo diferencial e integral de polinomios,
de funciones radical, de funciones racionales y de funciones
trigonométricas.

– 2x20 – 40 puntos

Total – 100 puntos

ג. Material auxiliar permitido :

- (1) Una calculadora no gráfica. No se admite la posibilidad de programación con calculadoras programables. El uso de calculadora gráfica o de la posibilidad de programación de las calculadoras programables puede causar la anulación del examen.
- (2) Hojas de fórmulas (adjuntas).
- (3) Diccionario hebreo-lengua extranjera / lengua extranjera-hebreo.

ד. Instrucciones especiales:

- (1) No copies la pregunta; indica solo su número.
- (2) Inicia cada respuesta a una nueva pregunta en una nueva hoja. Indica en el cuadernillo las etapas de la resolución, aun en el caso en que realices tus cálculos utilizando la calculadora. Explica detalladamente y de forma clara y ordenada, todas tus operaciones, incluidos los cálculos. La falta de detalles puede perjudicar la nota o causar la anulación del examen.

Escribe solamente en el cuadernillo del examen. Escribe "טיוטה" en el encabezado de toda página utilizada como borrador.

La escritura de borrador en páginas que no pertenecen al cuadernillo del examen puede producir la anulación del examen.

מתמטיקה

5 יחידות לימוד - שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון

– אלגברה והסתברות – 20×2 – 40 נקודות

פרק שני

– גאומטריה וטריגונומטריה במישור

– 20×1 – 20 נקודות

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,

של פונקציות שורש, של פונקציות

רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

– 20×2 – 40 נקודות

סה"כ – 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות

התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון

גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום

לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

(3) מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את

שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים

בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל

חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת

הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש

טיוטה.

כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת

הבחינה.

Preguntas

¡Presta atención! Explica detalladamente y de forma clara y ordenada, todas tus operaciones, incluidos los cálculos. La falta de detalles puede perjudicar la nota o causar la anulación del examen.

Primera parte – Álgebra y Probabilidad (40 puntos)

Responde a dos de las preguntas 1 – 3 (cada pregunta – 20 puntos).

¡Presta atención! Si respondes a más de dos preguntas, solo las dos primeras respuestas de tu cuadernillo serán tenidas en cuenta para la corrección.

1. La distancia entre la ciudad α y la ciudad β es 96 km.

Un automóvil y un camión partieron simultáneamente de la ciudad α y viajaron en dirección a la ciudad β .

Inicialmente el automóvil viajó a una velocidad constante de V_1 km/h.

Una vez recorridos 15 km del camino, el automóvil se detuvo a un costado de la ruta durante media hora, para reparar un desperfecto.

Una vez reparado el desperfecto, el automóvil siguió su camino a una velocidad constante de 90 km/h.

El camión viajó durante todo el camino a una velocidad constante de V_2 km/h.

El camión sobrepasó al automóvil 3 minutos después de que el automóvil se detuvo al costado de la ruta.

El automóvil y el camión llegaron a la ciudad β simultáneamente.

α . Halla V_1 y V_2 .

- β . ¿Cuánto tiempo pasó desde el momento en el que el automóvil y el camión iniciaron su camino hasta que la distancia entre ellos fue de 3 Km? (Halla dos de los tres casos).

2. a_n es una progresión aritmética.

k y p son números naturales. $k < p$.

Se da: $a_k = p$, $a_p = k$.

א. (1) Demuestra que la diferencia de la progresión a_n es -1 .

(2) Expresa a_1 por medio de k y p .

La progresión c_n se define así: $c_n = a_n - n$.

Se da que la suma de los 6 primeros términos de la progresión c_n es 0.

א. (1) Halla a_1 .

(2) ¿Cuáles son los valores de k y p ? Halla todas las posibilidades.

א. Calcula la suma $(c_1 - c_2)^2 + (c_3 - c_4)^2 + \dots + (c_{99} - c_{100})^2$. Justifica tu respuesta.

3. En una caja hay 12 bolitas. La mayoría son azules y el resto son rojas.

Se extrae de la caja una bolita al azar, se la devuelve a la caja, y nuevamente se extrae una bolita al azar y se la devuelve.

La probabilidad de que las dos bolitas extraídas tengan colores distintos es $\frac{4}{9}$.

א. Halla cuántas bolitas azules hay en la caja.

א. Se agregaron a la caja bolitas amarillas.

Luego de este agregado se extrae al azar una bolita, se la devuelve a la caja, y nuevamente se extrae al azar una bolita y se la devuelve.

La probabilidad de que hayan sido extraídas dos bolitas de color diferente se mantuvo en $\frac{4}{9}$.

¿Cuántas bolitas amarillas fueron agregadas a la caja?

Todas las bolitas amarillas se pasaron a otro recipiente y se dejaron en la caja sólo las bolitas azules y las rojas.

א. Se extraen bolitas de la caja al azar, una tras otra sin parar (sin devolución), hasta que la bolita extraída sea de color rojo.

¿Cuál es la probabilidad de que el número de extracciones haya sido mayor que 3?

Segunda parte – Geometría y Trigonometría en el plano (20 puntos)

Responde a una de las preguntas 4 – 5 .

¡Presta atención! Si respondes a más de una pregunta, solo la primera respuesta de tu cuadernillo será tomada en cuenta para su corrección.

4. AD y CE son bisectrices en el triángulo ABC , y el punto de intersección de ellas es F .

Dato: $\angle ABC = 60^\circ$.

⌘. Demuestra que se puede inscribir al cuadrilátero BDFE dentro de una circunferencia.

Dato: FB es un diámetro en la circunferencia que circunscribe al cuadrilátero BDFE .

⌚. Demuestra que el triángulo ABC es un triángulo equilátero .

La prolongación del segmento BF corta el lado AC en el punto G .

⌘. Demuestra que el segmento FG es igual en longitud al radio de la circunferencia que circunscribe al cuadrilátero BDFE.

Desde el punto F se traza una tangente a la circunferencia que circunscribe al cuadrilátero BDFE .

La tangente corta los lados BA y BC en los puntos K y L respectivamente.

⌚. Halla la razón $\frac{KL}{AC}$. Justifica tu respuesta.

5. En el triángulo ABC los puntos D y F se hallan sobre los lados BA y BC respectivamente, de forma tal que $DF \parallel AC$.

Los puntos G y N se hallan sobre el lado AC de forma tal que el cuadrilátero DFNG es un trapecio isósceles, como se describe en el dibujo.

Señalemos: $\angle BAC = \alpha$, $\angle FNC = \beta$.

Datos: $AD = 7$, $FC = 4$, $\angle FCN = 2\alpha$.

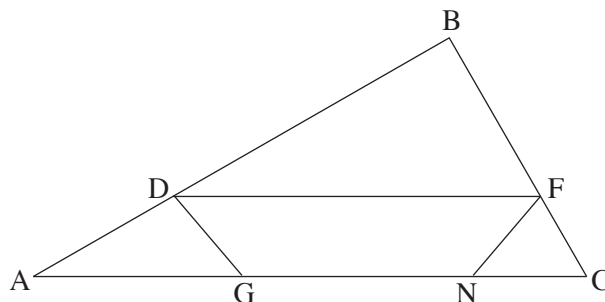
⌘. (1) Demuestra que: $\frac{FN}{\sin \alpha} = \frac{AD}{\sin \beta}$.

(2) Calcula α .

Dato: el área del triángulo BDF es 56 .

⌚. Halla la longitud del segmento DF .

⌘. ¿Cuál es la razón entre el radio de la circunferencia que circunscribe al triángulo FCN y el radio de la circunferencia que circunscribe al triángulo DAG ? Justifica tu respuesta .



**Tercera parte – Cálculo diferencial e integral de polinomios,
de funciones radical, de funciones racionales
y de funciones trigonométricas (40 puntos)**

Responde a dos de las preguntas 6 - 8 (cada pregunta – 20 puntos).

¡Presta atención! Si respondes a más de dos preguntas, solo las dos primeras respuestas en tu cuadernillo serán tenidas en cuenta para su corrección.

6. Se da la función $f(x) = \frac{6}{2 \cos^2 x - 5 \cos x - 3}$ en el intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$.

Responde a los apartados א - ג para el intervalo dado.

- א. (1) Halla el dominio de definición de la función $f(x)$.
- (2) Halla las coordenadas de los puntos extremo de la función $f(x)$, y determina su tipo.
- (3) Traza un esbozo del gráfico de la función $f(x)$.

Se da la función $h(x) = |f(x) + 2|$, que tiene dominio de definición idéntico al dominio de definición de la función $f(x)$.

- א. (1) Traza un esbozo del gráfico de la función $h(x)$.
- (2) k es un parámetro. Halla todos los valores de k para los cuales la recta $y = k$ corta al gráfico de la función $h(x)$ en cuatro puntos distintos.

Se da la función $g(x) = |f(x)| + 2$, que tiene dominio de definición idéntico al dominio de definición de la función $f(x)$.

- א. ¿Se puede afirmar que para todo x dentro del dominio de definición $h(x) < g(x)$?
Justifica tu respuesta.

7. Se da la función $f(x) = \frac{3x}{4x^2 - 1}$ que tiene dominio de definición $x \neq \pm \frac{1}{2}$.

- א. (1) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x)$ (si los hay).
(2) Halla los intervalos de positividad y de negatividad de la función $f(x)$.

Se da la función $g(x) = \sqrt{\frac{3x}{4x^2 - 1}}$.

- ב. (1) ¿Cuál es el dominio de definición de la función $g(x)$?
(2) ¿Cuáles son las ecuaciones de las asíntotas de la función $g(x)$ perpendiculares a los ejes?

Se da que la función $g(x)$ tiene exactamente un punto de inflexión. La coordenada x de este punto es menor que cero.

- ג. (1) Traza un esbozo del gráfico de la función $g(x)$.
(2) Traza un esbozo del gráfico de la función derivada, $g'(x)$.

ד. ¿Cuál es el dominio de definición de la función $h(x) = \frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{4x^2 - 1}}$?

8. Se da la función $f(x) = -x^2 + 1$.
 t es un parámetro. Dato: $0 < t < 1$.

En el punto en el cual $x = t$ se trazó una tangente al gráfico de la función $f(x)$ (ver dibujo).

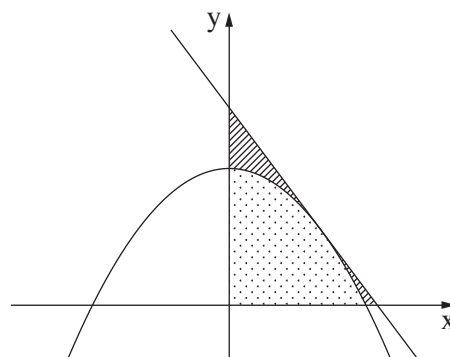
- א. Muestra que la ecuación de la tangente es $y = -2tx + t^2 + 1$.

Señalemos con S el área rayada en el dibujo (el área limitada por el gráfico de la función $f(x)$, por la tangente y por los ejes).

- ב. Halla el valor de t para el cual el área S es mínima.
Puedes dejar expresada la raíz en tu respuesta.

Señalemos con A el área puntillada (el área en el primer cuadrante limitada por el gráfico de la función $f(x)$ y por los ejes).

- ג. Determina para cada una de las dos siguientes proposiciones (i - ii) si ella es correcta o incorrecta. Justifica tu respuesta.
i) Existe un valor de t para el cual $\frac{A}{S}$ es máximo.
ii) Existe un valor de t para el cual $\frac{A}{S}$ es mínimo.



¡Buena Suerte!

Los derechos de autor están reservados al Estado de Israel.
Se prohíbe su copia o publicación salvo la autorización expresa del Ministerio de Educación.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך