

Mathématiques

5 unités d'étude - premier questionnaire

Instructions au candidat

א. Durée de l'examen : trois heures et demie.

ב. Structure du questionnaire et barème de notation :

Ce questionnaire comporte trois parties.

Première partie — Algèbre et probabilités

2 × 20 — 40 points

Deuxième partie — Géométrie et trigonométrie planes

1 × 20 — 20 points

Troisième partie — Calcul différentiel et intégral
de polynômes, de fonctions racines,
de fonctions rationnelles
et de fonctions trigonométriques

2 × 20 — 40 points

Total — 100 points

ג. Matériel auxiliaire autorisé :

- (1) Calculatrice non graphique. Il est interdit d'utiliser les options de programmation d'une calculatrice programmable. L'utilisation d'une calculatrice graphique ou des options de programmation d'une calculatrice peut entraîner votre disqualification.
- (2) Formulaires (jointés au sujet).
- (3) Dictionnaire hébreu-langue étrangère / langue étrangère-hébreu.

ד. Instructions supplémentaires :

- (1) Ne recopiez pas la question, indiquez seulement son numéro.
- (2) Commencez chaque question sur une nouvelle page. Écrivez dans le cahier d'examen les étapes de la résolution, même lorsque les calculs se font à l'aide de la calculatrice. Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, en détail et de façon claire et ordonnée. Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Écrivez dans le cahier d'examen uniquement. Inscrivez "טיוטה" en haut de chaque page de brouillon.

Écrire des notes de brouillon sur d'autres feuilles que celles du cahier d'examen, risque d'entraîner votre disqualification.

מתמטיקה

5 יחידות לימוד - שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות

20 × 2 — 40 נקודות

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור

20 × 1 — 20 נקודות

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

של פולינומים, של פונקציות שורש,

של פונקציות רציונליות

ושל פונקציות טריגונומטריות

20 × 2 — 40 נקודות

סך הכול — 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).
- (3) מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
- (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה. כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Bonne chance!

בהצלחה!

Questions

Attention : Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, de manière détaillée et claire.

Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Première partie – Algèbre et probabilités (40 points)

Répondez à deux des questions 1-3 (20 points par question).

Attention : Si vous répondez à plus de deux questions, seules les deux premières réponses de votre copie seront corrigées.

1. La distance entre une ville α et une ville β est de 96 km.

Une voiture et un camion sont partis en même temps de la ville α et ont roulé vers la ville β .

Au départ, la voiture a roulé à une vitesse constante de V_1 km/h.

Après qu'elle a parcouru 15 km du trajet, elle s'est arrêtée sur le bord de la route durant une demi-heure afin de réparer une panne.

Après que la panne ait été réparée, la voiture a poursuivi sa route à une vitesse constante de 90 km/h.

Le camion a roulé durant tout son trajet à une vitesse constante de V_2 km/h.

Celui-ci a dépassé la voiture 3 minutes après que la voiture s'est arrêtée sur le bord de la route.

La voiture et le camion sont arrivés à la ville β en même temps.

א. Déterminez V_1 et V_2 .

ב. Combien de temps après que la voiture et le camion ont démarré, la distance qui les séparait a été de 3 km (déterminez deux des trois cas) ?

2. a_n est une suite arithmétique.

k et p sont des nombres entiers naturels. $k < p$.

Données : $a_k = p$, $a_p = k$.

⌘. (1) Démontrez que la raison de la suite a_n est -1 .

(2) Exprimez a_1 en fonction de k et p .

La suite c_n est définie ainsi : $c_n = a_n - n$.

Il est donné que la somme des 6 premiers termes de la suite c_n vaut 0.

⌘. (1) Déterminez a_1 .

(2) Quelles sont les valeurs de k et de p ? Déterminez toutes les possibilités.

⌘. Calculez la somme $(c_1 - c_2)^2 + (c_3 - c_4)^2 + \dots + (c_{99} - c_{100})^2$. Justifiez.

3. Une boîte contient 12 boules. La majorité des boules sont bleues et le reste des boules sont rouges.

On a tiré au hasard une boule de la boîte, on l'a remise dans la boîte, puis on a sorti à nouveau au hasard une boule puis on l'a remise.

La probabilité que les deux boules sorties étaient de couleurs différentes est de $\frac{4}{9}$.

⌘. Déterminez combien de boules bleues contient la boîte.

⌘. On a ajouté des boules jaunes dans la boîte.

Après cet ajout, on a sorti au hasard une boule, on l'a remise, puis on a sorti à nouveau au hasard une boule puis on l'a remise.

La probabilité que l'on ait sorti deux boules de couleurs différentes est demeurée de $\frac{4}{9}$.

Combien de boules jaunes a-t-on ajouté dans la boîte ?

On a transféré toutes les boules jaunes dans un autre récipient en laissant dans la boîte uniquement les boules bleues et les boules rouges.

⌘. On a sorti au hasard des boules les unes après les autres de la boîte (sans remise), jusqu'à ce que l'on ait sorti une boule rouge.

Quelle est la probabilité que le nombre de tirages ait été supérieur à 3 ?

Deuxième partie – Géométrie et trigonométrie planes (20 points)

Répondez à l'une des questions 4-5 .

Attention : Si vous répondez à plus d'une question, seule la première réponse de votre copie sera corrigée.

4. AD et CE sont des bissectrices d'un triangle ABC , et F est leur point d'intersection.

Donnée : $\angle ABC = 60^\circ$.

- ⌘. Démontrez qu'il est possible d'inscrire le quadrilatère BDFE dans un cercle.

Donnée : FB est un diamètre du cercle circonscrit au quadrilatère BDFE .

- ⌘. Démontrez que le triangle ABC est un triangle équilatéral.

Le prolongement du segment BF coupe le côté AC au point G .

- ⌘. Démontrez que la longueur du segment FG est égale à celle du rayon du cercle circonscrit au quadrilatère BDFE .

On trace une tangente au cercle circonscrit au quadrilatère BDFE passant par le point F .

Cette tangente coupe respectivement les côtés BA et BC aux points K et L .

- ⌘. Déterminez le rapport $\frac{KL}{AC}$. Justifiez votre réponse.

5. Dans le triangle ABC , les points D et F se trouvent respectivement sur les côtés BA et BC de sorte que $DF \parallel AC$.

Les points G et N se trouvent sur le côté AC de sorte que le quadrilatère DFNG est un trapèze isocèle, tel que cela est décrit dans la figure.

On note : $\angle BAC = \alpha$, $\angle FNC = \beta$.

Donnée : $AD = 7$, $FC = 4$, $\angle FCN = 2\alpha$.

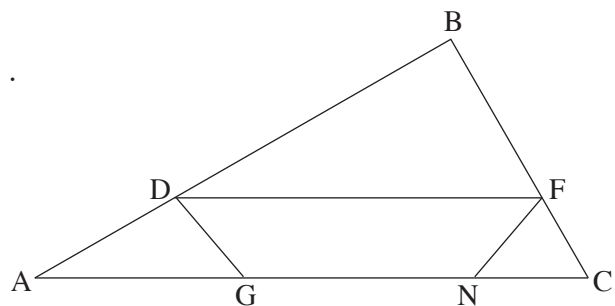
- ⌘. (1) Démontrez que $\frac{FN}{\sin \alpha} = \frac{AD}{\sin \beta}$.

- (2) Calculez α .

Donnée : l'aire du triangle BDF est 56 .

- ⌘. Déterminez la longueur du segment DF .

- ⌘. Quel est le rapport entre le rayon du cercle circonscrit au triangle FCN et le rayon du cercle circonscrit au triangle DAG ? Justifiez.



**Troisième partie – Calcul différentiel et intégral de polynômes,
de fonctions racines, de fonctions rationnelles
et de fonctions trigonométriques (40 points)**

Répondez à deux des questions 6-8 (20 points par question).

Attention : Si vous répondez à plus de deux questions, seules les deux premières réponses de votre copie seront corrigées.

6. Soit la fonction $f(x) = \frac{6}{2 \cos^2 x - 5 \cos x - 3}$ sur l'intervalle $0 \leq x \leq 2\pi$.

Répondez aux articles א-ג pour l'intervalle donné.

- א. (1) Déterminez le domaine de définition de la fonction $f(x)$.
- (2) Déterminez les coordonnées des points d'extremum de la fonction $f(x)$, puis déterminez leur type.
- (3) Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.

Soit la fonction $h(x) = |f(x) + 2|$, dont le domaine de définition est identique au domaine de définition de la fonction $f(x)$.

- א. (1) Tracez une esquisse du graphe de la fonction $h(x)$.
- (2) k est un paramètre. Déterminez toutes les valeurs de k pour lesquelles la droite $y = k$ coupe le graphe de la fonction $h(x)$ en quatre points différents.

Soit la fonction $g(x) = |f(x)| + 2$, dont le domaine de définition est identique au domaine de définition de la fonction $f(x)$.

- א. Est-ce que $h(x) < g(x)$ pour tout x du domaine de définition ? Justifiez.

7. Soit la fonction $f(x) = \frac{3x}{4x^2 - 1}$ dont le domaine de définition est $x \neq \pm \frac{1}{2}$.

- א. (1) Déterminez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction $f(x)$ (s'il en existe)
 (2) Déterminez les intervalles sur lesquels la fonction $f(x)$ est positive et ceux sur lesquels elle est négative.

Soit la fonction $g(x) = \sqrt{\frac{3x}{4x^2 - 1}}$.

- א. (1) Quel est le domaine de définition de la fonction $g(x)$?
 (2) Quelles sont les équations des asymptotes de la fonction $g(x)$ perpendiculaires aux axes ?

Il est donné que la fonction $g(x)$ n'admet qu'un seul point d'inflexion. L'abscisse de ce point est inférieure à zéro.

- א. (1) Tracez une esquisse du graphe de la fonction $g(x)$.
 (2) Tracez une esquisse du graphe de la fonction dérivée $g'(x)$.

ב. Quel est le domaine de définition de la fonction $h(x) = \frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{4x^2 - 1}}$?

8. Soit la fonction $f(x) = -x^2 + 1$.

t est un paramètre. Donnée : $0 < t < 1$.

On a tracé une tangente au graphe de la fonction $f(x)$ au point où $x = t$ (voir figure).

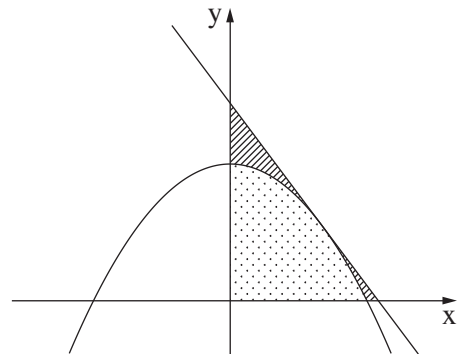
- א. Montrez que l'équation de cette tangente est $y = -2tx + t^2 + 1$.

On note S l'aire hachurée sur la figure (l'aire délimitée par le graphe de la fonction $f(x)$, par la tangente et par les axes).

- א. Déterminez pour quelle valeur de t l'aire S est minimale.
 Vous pourrez laisser une racine dans votre réponse.

On note A l'aire pointillée sur la figure (l'aire dans le premier quadrant délimitée par le graphe de la fonction $f(x)$ et par les axes).

- א. Déterminez pour chacune des deux affirmations ci-dessous (i - ii) si elle vraie ou fausse. Justifiez votre réponse.
 i) Il existe une valeur de t pour laquelle $\frac{A}{S}$ est maximal.
 ii) Il existe une valeur de t pour laquelle $\frac{A}{S}$ est minimal.



Bonne chance!

Tous droits réservés à l'État d'Israël.
 Toute copie ou publication est interdite sans l'autorisation du
 Ministère de l'Éducation.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
 אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך