

Matemáticas
5 unidades de estudio – Segundo cuestionario

מתמטיקה
5 יחידות לימוד – שאלון שני

Instrucciones para el examen

הוראות לנבחן

א. Duración del examen: Dos horas y cuarto.

א. משך הבחינה: שתיים ורבע.

ב. Estructura del cuestionario y clave de la evaluación:

ב. מבנה השאלון ומפתח הערכה:

Este cuestionario consta de dos partes.

בשאלון זה שני פרקים.

Primera parte – Geometría analítica, vectores, trigonometría
del espacio, números complejos

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים,

$$2 \times 33 \frac{1}{3} - 66 \frac{2}{3} \text{ puntos}$$

טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

$$2 \times 33 \frac{1}{3} - 66 \frac{2}{3} \text{ נקודות}$$

Segunda parte – Crecimiento y decrecimiento, funciones potencia,
funciones exponenciales y logarítmicas

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות

$$1 \times 33 \frac{1}{3} - 33 \frac{1}{3} \text{ puntos}$$

מעריכיות ולוגריתמיות

$$\text{Total} - 100 \text{ puntos}$$

$$33 \frac{1}{3} - 33 \frac{1}{3} \times 1 \text{ נקודות}$$

$$100 - 100 \text{ סה"כ נקודות}$$

ג. Material auxiliar permitido:

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) Una calculadora no gráfica. No se admite la posibilidad de programación con calculadoras programables. El uso de calculadora gráfica o de la posibilidad de programación de las calculadoras programables puede causar la anulación del examen.
- (2) Hojas de fórmulas (adjuntas).
- (3) Diccionario hebreo-lengua extranjera / lengua extranjera-hebreo.

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש

באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות

במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

(3) מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. Instrucciones especiales:

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) No copies la pregunta; indica sólo su número.
- (2) Inicia cada respuesta a una nueva pregunta en una nueva hoja. Indica en el cuadernillo las etapas de la resolución, aun en el caso en que realices tus cálculos utilizando la calculadora. Explica detalladamente y de forma clara y ordenada, todas tus operaciones, incluidos los cálculos. La falta de detalles puede perjudicar la nota o causar la anulación del examen.

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי

הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה

ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת

הבחינה.

Escribe en el cuadernillo del examen solamente. Escribe "טייטה" en el encabezado de toda página usada de borrador.

La escritura de borrador en páginas que no están en el cuadernillo del examen podría causar la anulación del examen.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טייטה" בראש כל עמוד המשמש טייטה. כתיבת טייטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Preguntas

Presta atención: Explica detalladamente y de forma clara y ordenada, todas tus operaciones, incluidos los cálculos.

La falta de detalles puede perjudicar la nota o causar la anulación del examen.

Primera parte — Geometría analítica, vectores, trigonometría del espacio, números complejos ($66\frac{2}{3}$ puntos)

Responde a dos de las preguntas 1 – 3 (cada pregunta $33\frac{1}{3}$ puntos).

¡Presta atención! Si respondes a más de dos preguntas, sólo las dos primeras respuestas de tu cuadernillo serán tenidas en cuenta para la corrección.

1. Se da una circunferencia de ecuación: $x^2 + y^2 = a^2$. a es un parámetro positivo.
Se trasladó la circunferencia hacia la derecha (traslación horizontal) de modo que sea tangente al eje y .
 - א. Expresa por medio de a la ecuación de la circunferencia que se obtiene.
 - ב. Se construye una circunferencia que es tangente exterior a la circunferencia que se obtuvo en el apartado א y es también tangente al eje y . La coordenada x del centro de la circunferencia que se construye es positiva.
Halla la ecuación del lugar geométrico sobre el cual se hallan los centros de las circunferencias construidas de este modo (de ser necesario, válete de a).
La recta $y = x + 3$ es tangente por el punto M al lugar geométrico cuya ecuación hallaste en el apartado ב.
 - ג. Halla a .
 - ד. Escribe las coordenadas de los puntos de tangencia de estas dos circunferencias:
 - I. La circunferencia que se obtuvo en el apartado א.
 - II. La circunferencia que se construyó como se describe en el apartado ב y cuyo centro es el punto M .

2. Se da una pirámide $SABCD$, cuya base, $ABCD$, es un cuadrado (ver dibujo).

El punto O es el punto de intersección de las diagonales de la base.

El punto P es un punto sobre el segmento SD , y cumple

$$\overrightarrow{SP} = t \cdot \overrightarrow{SD}, \quad t > 0.$$

Indicaremos: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AS} = \underline{w}$.

א. Expresa el vector $\overrightarrow{OP}$ por medio de $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ y t .

ב. Halla para qué valor de t , OP es paralelo al plano de la cara SAB .

Se sabe que: la longitud del lado del cuadrado

$ABCD$ es 4,

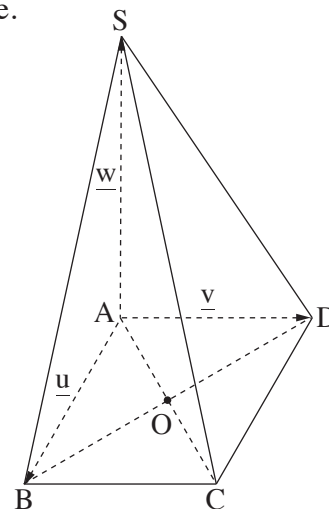
AS es perpendicular a la base de la pirámide, $AS = 4\sqrt{2}$.

El punto A es el origen de coordenadas. Los puntos B , D y S se hallan sobre la parte positiva de los ejes x , y y z respectivamente.

ג. Halla para qué valores de t , la recta OP genera un ángulo de 45° con el plano de la cara SAD .

El punto T se halla sobre el segmento SC de modo que $TABCD$ es una pirámide recta.

ד. Halla el volumen de la pirámide $TABCD$.



3. Se da la progresión geométrica cuyo primer término es 1 y su segundo término es iz (z es un número complejo).

Se sabe que la progresión no es constante.

א. (1) Escribe los primeros cinco términos de la progresión (si fuera necesario expresa por medio de z).

(2) Demuestra la suma de los primeros cinco términos de la progresión es $\frac{z^5 + i}{z + i}$.

ב. (1) Halla todas las soluciones de la ecuación $z^5 = -i$ (z es un número complejo).

(2) Halla todas las soluciones de la ecuación $1 + iz - z^2 - iz^3 + z^4 = 0$ (z es un número complejo).

El punto A se halla en el tercer cuadrante en el plano de Gauss, y corresponde a una de las soluciones de la ecuación que resolviste en el subapartado ב (2).

ABO es un triángulo equilátero en el plano de Gauss (O es el origen de coordenadas).

ג. Halla el número complejo que corresponde al punto B (Halla las dos posibilidades).

Segunda parte — Crecimiento y decrecimiento, funciones potencia funciones exponenciales y logarítmicas ($33\frac{1}{3}$ puntos)

Responde a una de las preguntas 4 – 5.

¡Presta atención! Si respondes a más de una pregunta, sólo la primera respuesta de tu cuadernillo será tenida en cuenta para la corrección.

4. Se da la función $f(x) = \ln(x^2 + ax + 1)$.

a es un parámetro, $-2 < a < 2$.

א. Muestra que la función $f(x)$ está definida para todo x .

ב. Halla las coordenadas de los puntos de intersección del gráfico de la función $f(x)$ con el eje x (si fuera necesario expresa por medio del parámetro a) .

ג. Halla las coordenadas de los puntos de extremo de la función $f(x)$ y determina su tipo (Si fuera necesario expresa por medio del parámetro a) .

ד. Al final de la pregunta se hallan tres gráficos (I-III) que describen el gráfico de la función $f(x)$ en función del parámetro a .

Cada uno de los gráficos corresponde a uno de los intervalos (1)-(3) de a :

(1) $0 < a < 2$

(2) $-2 < a < 0$

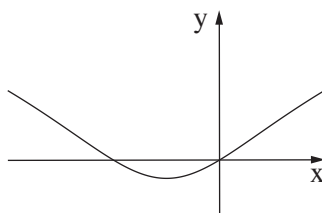
(3) $a = 0$

Escribe cuál de los intervalos de valores (1)-(3) corresponde a cada uno de los gráficos.

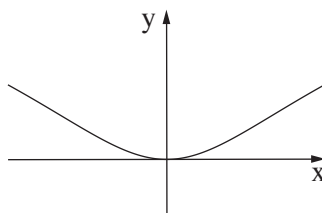
Responde al apartado ה para el a que cumple $-2 < a < 0$.

Indicaremos con S el área limitada por el gráfico de la función $f(x)$ y por el eje x .

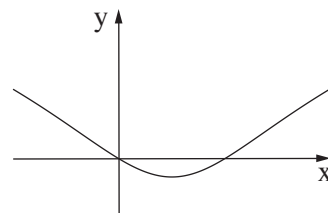
ה. Expresa por medio de a y S la integral: $\int_0^{-a} \ln(4x^2 + 4ax + 4) dx$.



I



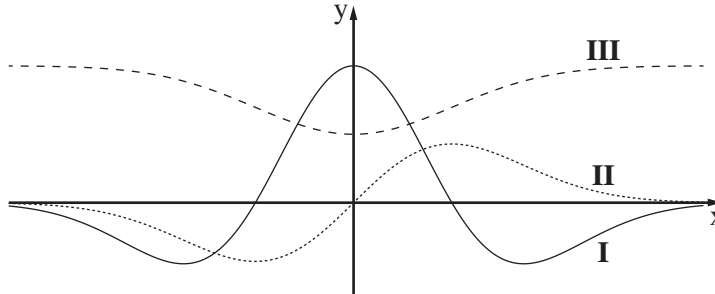
II



III

5. A continuación se halla un dibujo que describe el gráfico de las funciones f'' , f' , f definidas para todo x .

El gráfico III se halla por completo sobre el gráfico II.



- א. Haz corresponder cada uno de los gráficos III, II, I con las funciones f'' , f' , f .
 Justifica tu afirmación.

El punto A se halla sobre el gráfico de la función $f(x)$ y el punto B se halla sobre el gráfico de la función $f'(x)$, de modo que el segmento AB es paralelo al eje y.

Se sabe que $f'(x) = x \cdot e^{-x^2}$.

- ב. Halla para qué valor de x la longitud del segmento AB será mínima, y para qué valor de x la longitud del segmento AB será máxima.

Se sabe que la longitud máxima del segmento AB es igual a $1 + \frac{1}{2e}$.

- ג. Halla la función $f(x)$.

¡Buena Suerte!

Los derechos de autor están reservados al Estado de Israel.
 Se prohíbe su copia o publicación salvo la autorización expresa
 del Ministerio de Educación.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
 אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך