

Matemáticas

5 unidades de estudio—Primer cuestionario

Instrucciones para el examen

א. Duración del examen: Tres horas y media.

ב. Estructura del cuestionario y clave de la evaluación:

Este cuestionario consta de tres partes.

Primera parte – Álgebra y Probabilidad – -2×20 – 40 puntos

Segunda parte –

Geometría y Trigonometría del plano -1×20 – 20 puntos

Tercera parte – Cálculo diferencial e integral de polinomios, de funciones radical, de funciones racionales y de funciones trigonométricas.

-2×20 – 40 puntos

Total – 100 puntos

ג. Material auxiliar permitido :

(1) Una calculadora no gráfica. No se admite la posibilidad de programación con calculadoras programables.

El uso de calculadora gráfica o de la posibilidad de programación de las calculadoras programables puede causar la anulación del examen.

(2) Hojas de fórmulas (adjuntas).

(3) Diccionario hebreo-lengua extranjera / lengua extranjera-hebreo.

ד. Instrucciones especiales:

(1) No copies la pregunta; indica sólo su número.

(2) Inicia cada respuesta a una nueva pregunta en una nueva hoja.

Indica en el cuadernillo las etapas de la resolución, aun en el caso en que realices tus cálculos utilizando la calculadora.

Explica detalladamente y de forma clara y ordenada, todas tus operaciones, incluidos los cálculos.

La falta de detalles puede perjudicar la nota o causar la anulación del examen.

Escribe solamente en tu cuadernillo de examen. Escribe "טייטה" al principio de cada hoja que utilices como borrador.

La utilización de hojas de borrador que no se hallen en el cuadernillo de examen puede causar la anulación del mismo.

מתמטיקה

5 יחידות לימוד - שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות – 20×2 – 40 נקודות

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

– 20×1 – 20 נקודות

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים;

של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות

טריגונומטריות – 20×2 – 40 נקודות
סה"כ – 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון

הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות

במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

(3) מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון,

גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה

ומסודרת.

חסור פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טייטה" בראש כל עמוד המשמש כטייטה
תציב טייטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה

Preguntas

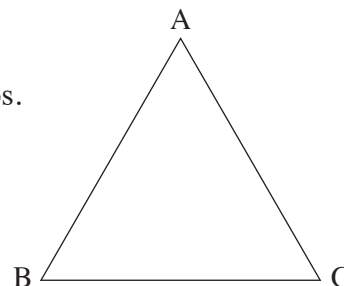
Presta atención: Explica detalladamente y de forma clara y ordenada, todas tus operaciones, incluidos los cálculos. La falta de detalles puede perjudicar la nota o causar la anulación del examen.

Primera parte – Álgebra y Probabilidad (40 puntos)

Responde a dos de las preguntas 1 – 3 (cada pregunta – 20 puntos).

Presta atención: Si respondes a más de dos preguntas, sólo las dos primeras respuestas de tu cuadernillo serán tenidas en cuenta para la corrección.

1. En el siguiente dibujo se describe una pista de ciclismo con forma de triángulo equilátero ABC, la longitud de cuyo lado es de a metros. Cierta día salen dos ciclistas al mismo tiempo desde el punto A en dirección al punto B.



Pedalearon en la misma dirección a lo largo de la pista triangular. Cada uno de ellos condujo su bicicleta a una velocidad constante. La velocidad del ciclista α era 2 metros por segundo mayor que la velocidad del ciclista β .

Cuando el ciclista α llegó al punto A luego de completar dos veces el circuito triangular, el ciclista β llegó al punto B por segunda vez.

- α . Halla la velocidad de cada uno de los ciclistas.
 β . ¿En qué punto sobre el triángulo habrá estado el ciclista β , cuando el ciclista α llegó al punto A luego de completar 5 veces el circuito triangular?

Cuando el ciclista α llegó al punto A después de completar 5 veces el circuito, dio la vuelta y comenzó a pedalear en sentido contrario: desde el punto A hacia el punto C, sin modificar su velocidad.

El ciclista β continuó pedaleando en el sentido del viaje original, sin modificar su velocidad. Los ciclistas se encontraron en el punto M.

- α . Halla sobre qué lado del triángulo se halla el punto M, y halla en qué proporción el punto M corta al lado que hallaste.

Al día siguiente partieron nuevamente los ciclistas desde el punto A, pedalearon en dirección del punto B y continuaron viajando por el circuito triangular, cada uno de ellos a la misma velocidad a la que lo había hecho el día anterior. El ciclista α sobrepasó al ciclista β por primera vez 6 minutos después de la partida.

- γ . Halla el perímetro del triángulo. Justifica tu respuesta.

2. Se da la progresión a_n que cumple, para todo n , la regla: $a_{n+1} + a_n = 6n + 5$.
- א. Demuestra que se cumple $a_{n+2} = a_n + c$ (c es un número constante), y halla c .
 - ב. Escribe un ejemplo de la progresión a_n que cumpla con la regla, y que no sea una progresión aritmética (escribe al menos los primeros 4 términos de la sucesión).

Se da que toda la progresión a_n es aritmética.

- ג. Calcula a_1 .

Se formó una nueva progresión de $2n + 1$ términos:

$$a_1 - 1, a_2 - 2, a_3 - 3, \dots, a_{2n+1} - (2n + 1)$$

El término del medio en la nueva progresión es 43.

- ד. Calcula la suma de la nueva progresión.

3. En una caja hay 12 bolas azules, 20 bolas rojas y 8 bolas amarillas.

Sobre 28 de dichas bolas está escrita la cifra **1**, y sobre el resto está escrita la cifra **0**.

$\frac{1}{4}$ de las bolas sobre las que está escrita la cifra **1** son amarillas.

El número de las bolas rojas sobre las que está escrita la cifra **1** es 4 veces mayor que el número de bolas azules sobre las que está escrita la cifra **0**.

Dany extrae al azar una bola de la caja.

- א. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola que extrajo Dany sea una bola azul y que en ella esté escrita la cifra **1**?
- ב. Si se sabe que Dany extrajo al azar una bola azul o una bola en la que está escrita la cifra **1**, ¿cuál es la probabilidad de que haya extraído una bola sobre la que está escrita la cifra **0**?

Dany devolvió la bola a la caja, y ahora hace un juego: extrae al azar una bola de la caja, anota la cifra que está escrita en ella, y devuelve la bola a la caja.

Cada vez que extrae una bola sobre la que está escrita la cifra **1**, se adjudica un punto.

El juego terminará cuando haya acumulado 5 puntos.

- ג. ¿Cuál es la probabilidad de que Dany acumule 5 puntos después de 6 veces exactamente?

Segunda parte – Geometría y Trigonometría del plano (20 puntos)

Responde a una de las preguntas 4 – 5 .

Presta atención: Si respondes a más de una pregunta, sólo la primera respuesta de tu cuadernillo será tenida en cuenta para su corrección.

4. AB es el diámetro de una circunferencia. CD y AF son dos cuerdas de la circunferencia, paralelas entre sí.

AB y CD se cortan en el punto K (ver dibujo).

Se sabe que $\widehat{CA} = \widehat{AF}$ (los arcos marcados en el dibujo).

א. (1) Demuestra que $\angle FAB = \angle CAB$.

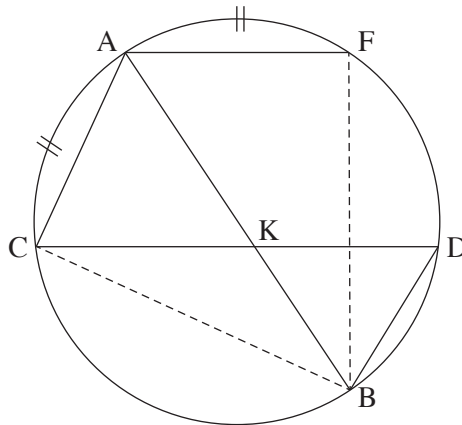
(2) Demuestra que $BK = BD$.

ב. Demuestra que el cuadrilátero AFKC es un rombo.

ג. Se da también que $BD \cdot AB = CD \cdot AC$.

(1) Demuestra que $\triangle BDC \sim \triangle CAB$.

(2) Demuestra que CD es un diámetro en el círculo.



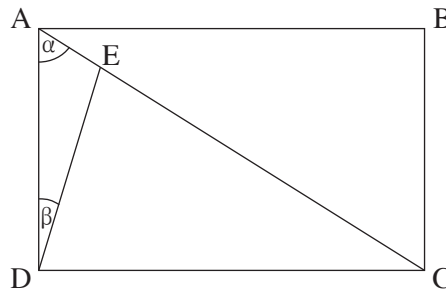
5. Se da el rectángulo ABCD. El punto E se halla sobre la diagonal AC (ver dibujo).

Se da que $\angle DAC = \alpha$

$\angle ADE = \beta$

R_1 es el radio de la circunferencia que circunscribe al rectángulo ABCD.

R_2 es el radio del círculo que circunscribe al triángulo ADE.



א. Expresa la relación $\frac{R_1}{R_2}$ por medio de α y de β .

ב. Muestra que cuando $\alpha = \beta$ se cumple $\frac{R_1}{R_2} < 2$.

ג. Se da que $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 15^\circ$.

(1) Muestra que $\triangle DEC$ es un triángulo isósceles.

(2) Expresa BE^2 por medio de R_1 .

Tercera parte – Cálculo diferencial e integral de polinomios, de funciones radical, de funciones racionales y de funciones trigonométricas (40 puntos)

Responde a dos de las preguntas 6 - 8 (cada pregunta – 20 puntos).

Presta atención: Si respondes a más de dos preguntas, sólo las dos primeras respuestas en tu cuadernillo serán tenidas en cuenta para su corrección.

6. Se da la función $f(x) = a \cdot \cos 2x + \sin^2 x$ definida para el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$. a es un parámetro.
- א. La función $f(x)$, ¿es par, o impar, o ninguna de ambas? Justifica tu respuesta.
 - ב. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos de extremo de la función $f(x)$ (expresa por medio de a si fuere necesario), si se da que la función no es constante? Determina su tipo de acuerdo con el valor de a (refiérete a las dos posibilidades para a).
 - ג. Halla el valor de a para el cual la función $f(x)$ es constante. Justifica tu respuesta.
- Dato: $a > 1$
- ד. (1) Traza un esbozo del gráfico de la función $f(x)$.
(2) Traza un esbozo del gráfico de la función derivada $f'(x)$.
 - ה. Se da que el área limitada por el gráfico de la función derivada $f'(x)$ y por el eje x es igual a 12. Halla a .

7. Se da una circunferencia de diámetro AB. El radio de la circunferencia es 10. El punto P se halla sobre el diámetro AB, entre el centro de la circunferencia y el punto B. Por el punto P se hizo pasar una perpendicular a AB, que corta a la circunferencia en los puntos C y D. Halla el área máxima del triángulo ACD.

8. Se da la función $f(x) = \frac{x^2 + bx - c}{x^2 - 4}$. c y b son parámetros.

א. Halla el dominio de definición de la función $f(x)$.

Se da que la función $f(x)$ es par.

ב. Halla b .

Se sabe que el gráfico de la función $f(x)$ posee dos puntos de intersección con el eje x entre sus dos asíntotas perpendiculares.

ג. Halla el intervalo de valores de c .

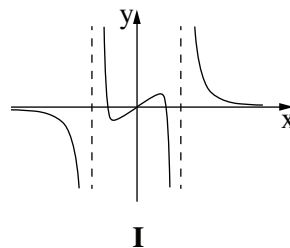
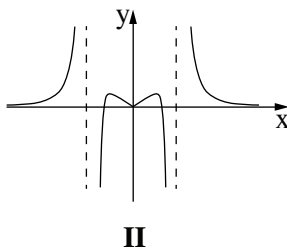
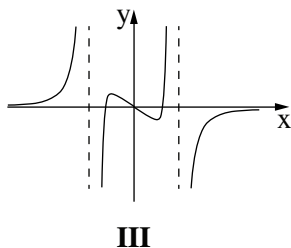
ד. (1) Halla las coordenadas del punto de extremo de la función $f(x)$, y determina su tipo (expresa por medio de c si fuere necesario).

(2) Halla la asíntota horizontal de la función $f(x)$, y traza un esbozo del gráfico de la función $f(x)$.

ה. Se da la función $g(x) = f(x) \cdot f'(x)$ definida en el mismo intervalo en el que están definidas las funciones $f(x)$ y $f'(x)$. A continuación los gráficos I-III.

(1) ¿Cuál de los gráficos, I-III, es el gráfico de la función $g(x)$? Justifica tu respuesta.

(2) Expresa por medio de c el área delimitada por el gráfico de la función $g(x)$ y por el eje x .



¡Buena Suerte!

Los derechos de autor están reservados al Estado de Israel.
 Se prohíbe su copia o publicación salvo la autorización expresa
 del Ministerio de Educación.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
 אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך