

Mathématiques
5 unités d'étude - deuxième questionnaire

Instructions au candidat

א. Durée de l'examen : deux heures et quart.

ב. Structure du questionnaire et barème de notation :

Ce questionnaire comporte deux parties.

Première partie — Géométrie analytique, vecteurs, trigonométrie dans l'espace, nombres complexes.

$$2 \times 33 \frac{1}{3} - 66 \frac{2}{3} \text{ points}$$

Deuxième partie — Croissance et décroissance, fonctions puissance, fonctions exponentielles et logarithmiques.

$$1 \times 33 \frac{1}{3} - 33 \frac{1}{3} \text{ points}$$

$$\text{Total} - 100 \text{ points}$$

ג. Matériel auxiliaire autorisé :

- (1) Calculatrice non graphique. Il est interdit d'utiliser les options de programmation d'une calculatrice programmable. L'utilisation d'une calculatrice graphique ou des options de programmation d'une calculatrice peut entraîner votre disqualification.
- (2) Formulaires (jointes au sujet).
- (3) Dictionnaire hébreu-langue étrangère / langue étrangère-hébreu.

ד. Instructions supplémentaires :

- (1) Ne recopiez pas la question ; indiquez seulement son numéro.
- (2) Commencez chaque question sur une nouvelle page. Écrivez dans le cahier d'examen les étapes de la résolution, même lorsque les calculs se font à l'aide de la calculatrice. Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, en détail et de façon claire et ordonnée. Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Écrivez dans votre cahier d'examen uniquement. Indiquez "טייטה" en haut de chaque page utilisée comme brouillon. Écrire des notes de brouillon en dehors de celles du cahier d'examen, risque d'entraîner votre disqualification.

Bonne chance !

מתמטיקה
5 יחידות לימוד - שאלון שני

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שתיים ורבע.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שני פרקים.

פרק ראשון — גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

$$66 \frac{2}{3} - 33 \frac{1}{3} \times 2$$

פרק שני — גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

$$33 \frac{1}{3} - 33 \frac{1}{3} \times 1$$

$$\text{סה"כ} - 100 \text{ נקודות}$$

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).
- (3) מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
- (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טייטה" בראש כל עמוד המשמש טייטה. כתיבת טייטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

בהצלחה !

Questions

Attention : Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, de manière détaillée et claire.
Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Première partie - Géométrie analytique, vecteurs, trigonométrie dans l'espace et nombres complexes ($66\frac{2}{3}$ points)

Répondez à deux des questions 1-3 ($33\frac{1}{3}$ points par question).

Attention : Si vous répondez à plus de deux questions, seules les deux premières réponses de votre cahier seront corrigées.

1. Soit le cercle d'équation $x^2 + y^2 = a^2$. a est un paramètre positif.

On a déplacé le cercle vers la droite (déplacement horizontal) de sorte qu'il soit tangent à l'axe des ordonnées.

א. Déterminez l'équation du cercle obtenu en fonction de a .

- ב. On construit un cercle tangent par l'extérieur au cercle obtenu à l'article א, et qui est également tangent à l'axe des ordonnées. L'abscisse du cercle que l'on construit est positive.

Déterminez l'équation du lieu géométrique sur lequel se trouvent les centres des cercles ainsi construits (utilisez a si cela est nécessaire).

La droite $y = x + 3$ est tangente en un point M au lieu géométrique dont vous avez déterminé l'équation à l'article ב.

ג. Déterminez a .

- ד. Donnez les coordonnées du point de tangence des deux cercles suivants :

I. Le cercle obtenu à l'article א.

II. Le cercle construit de la manière décrite dans l'article ב et dont le centre se trouve au point M .

2. Soit la pyramide $SABCD$, dont la base $ABCD$ est un carré (voir figure).

Le point O est le point d'intersection des diagonales de la base.

Le point P est un point sur le segment SD vérifiant $\vec{SP} = t \cdot \vec{SD}$, $t > 0$.

On note : $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AS} = \underline{w}$.

א. Exprimez le vecteur $\vec{OP}$ en fonction de $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ et t .

ב. Déterminez pour quelle valeur de t , OP est parallèle au plan de la face SAB .

Données : la longueur du côté du carré $ABCD$ est 4,

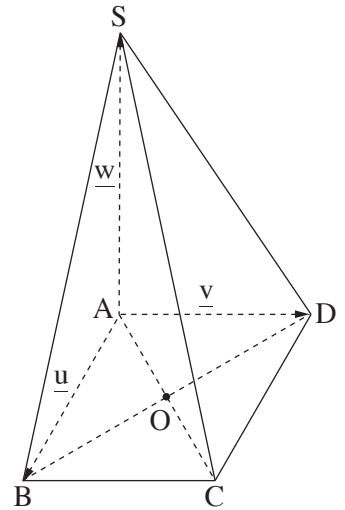
AS est orthogonale à la base de la pyramide, $AS = 4\sqrt{2}$.

Le point A est l'origine du repère. Les points B , D et S se trouvent respectivement sur la partie positive des axes des abscisses, des ordonnées et des cotes.

ג. Déterminez pour quelles valeurs de t , la droite OP forme un angle de 45° avec le plan de la face SAD .

Le point T se trouve sur le segment SC de sorte que $TABCD$ est une pyramide droite.

ד. Déterminez le volume de la pyramide $TABCD$.



3. Soit une suite géométrique dont le premier terme est 1 et dont le deuxième terme est iz (z est un nombre complexe).

Il est donné que la suite n'est pas constante.

א. (1) Donnez les cinq premiers termes de la suite (exprimez en fonction de z si cela est nécessaire).

(2) Démontrez que la somme des cinq premiers termes de la suite vaut $\frac{z^5 + i}{z + i}$.

ב. (1) Déterminez toutes les solutions de l'équation $z^5 = -i$ (z est un nombre complexe).

(2) Déterminez toutes les solutions de l'équation $1 + iz - z^2 - iz^3 + z^4 = 0$ (z est un nombre complexe).

Le point A se situe dans le troisième quadrant dans le plan de Gauss, et il correspond à l'une des solutions de l'équation que vous avez résolue au sous-article ב (2).

ABO est un triangle équilatéral dans le plan de Gauss (O – l'origine du repère).

ג. Déterminez le nombre complexe correspondant au point B (déterminez les deux possibilités).

Deuxième partie – Croissance et décroissance, fonctions puissance, fonctions exponentielles et logarithmiques (33 $\frac{1}{3}$ points)

Répondez à l'une des questions 4-5.

Attention : Si vous répondez à plus d'une question, seule la première réponse de votre cahier sera corrigée.

4. Soit la fonction $f(x) = \ln(x^2 + ax + 1)$.

a est un paramètre, $-2 < a < 2$.

- א. Montrez que la fonction $f(x)$ est définie pour tout x .
- ב. Déterminez les coordonnées des points d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ avec l'axe des abscisses (exprimez en fonction de a si cela est nécessaire).
- ג. Déterminez les coordonnées du point d'extremum de la fonction $f(x)$, puis déterminez son type (exprimez en fonction de a si cela est nécessaire).
- ד. Trois graphes (I-III) décrivant le graphe de la fonction $f(x)$ en fonction du paramètre a , sont représentés en fin de question.

Chacun de ces graphes correspond à l'un des intervalles de a (1) - (3) suivants :

(1) $0 < a < 2$

(2) $-2 < a < 0$

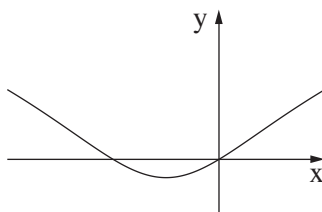
(3) $a = 0$

Indiquez pour chacun des intervalles (1) - (3), à quel graphe il correspond.

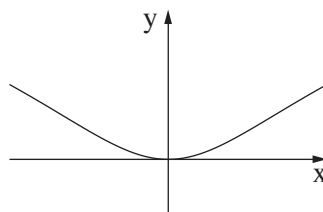
Répondez à l'article ה pour a vérifiant $-2 < a < 0$.

On note S l'aire délimitée par le graphe de la fonction $f(x)$ et par l'axe des abscisses.

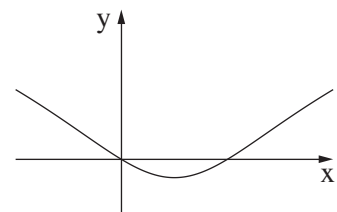
ה. Exprimez l'intégrale $\int_0^{-a} \ln(4x^2 + 4ax + 4) dx$ en fonction de a et de S .



I



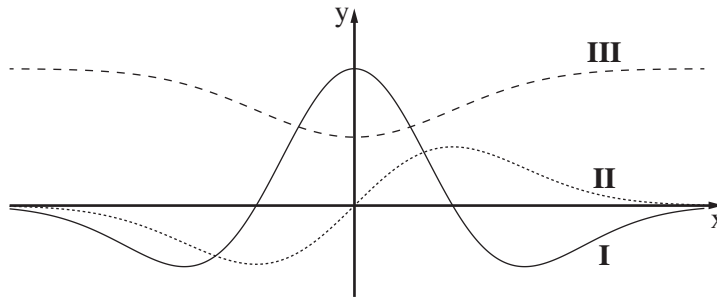
II



III

Suite en page 5 ►

5. Voici une figure décrivant les graphes des fonctions f'' , f' , f , définies pour tout x .
Le graphe III se trouve entièrement au dessus du graphe II.



- א. Faites correspondre chacun des graphes III, II, I avec les fonctions f'' , f' , f .
Justifiez votre réponse.

Le point A se trouve sur le graphe de la fonction $f(x)$ et le point B se trouve sur le graphe de la fonction $f'(x)$, de sorte que le segment AB est parallèle à l'axe des ordonnées.

Il est donné que $f'(x) = x \cdot e^{-x^2}$.

- ב. Déterminez pour quelle valeur de x , la longueur du segment AB est minimale, et pour quelle valeur de x , la longueur du segment AB est maximale.

Il est donné que la longueur maximale du segment AB est égale à $1 + \frac{1}{2e}$.

- ג. Déterminez la fonction $f(x)$.

Bonne chance!

Tous droits réservés à l'État d'Israël.
Toute copie ou publication est interdite sans l'autorisation du
Ministère de l'Éducation.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך