

Mathématiques

5 unités d'étude - premier questionnaire

Instructions au candidat

א. Durée de l'examen : trois heures et demie.

ב. Structure du questionnaire et barème de notation :

Ce questionnaire comporte trois parties.

Première partie — Algèbre et probabilités

2 × 20 — 40 points

Deuxième partie — Géométrie et trigonométrie planes

1 × 20 — 20 points

Troisième partie — Calcul différentiel et intégral
de polynômes, de fonctions racines,
de fonctions rationnelles
et de fonctions trigonométriques

2 × 20 — 40 points

Total — 100 points

ג. Matériel auxiliaire autorisé :

- (1) Calculatrice non graphique. Il est interdit d'utiliser les options de programmation d'une calculatrice programmable. L'utilisation d'une calculatrice graphique ou des options de programmation d'une calculatrice peut entraîner votre disqualification.
- (2) Formulaires (jointés au sujet).
- (3) Dictionnaire hébreu-langue étrangère / langue étrangère-hébreu.

ד. Instructions supplémentaires :

- (1) Ne recopiez pas la question, indiquez seulement son numéro.
- (2) Commencez chaque question sur une nouvelle page. Écrivez dans le cahier d'examen les étapes de la résolution, même lorsque les calculs se font à l'aide de la calculatrice. Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, en détail et de façon claire et ordonnée. Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Écrivez dans votre cahier d'examen uniquement. Indiquez "טייטה" en haut de chaque page utilisée comme brouillon. Écrire des notes de brouillon en dehors de celles du cahier d'examen, risque d'entraîner votre disqualification.

Bonne chance!

מתמטיקה

5 יחידות לימוד - שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות

20 × 20 — 40 נקודות

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור

20 × 20 — 20 נקודות

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

של פולינומים, של פונקציות שורש,

של פונקציות רציונליות

ושל פונקציות טריגונומטריות

20 × 20 — 40 נקודות

סה"כ — 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).
- (3) מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
- (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טייטה" בראש כל עמוד המשמש טייטה. כתיבת טייטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

בהצלחה!

Questions

Attention : Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, de manière détaillée et claire.
Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Première partie – Algèbre et probabilités (40 points)

Répondez à deux des questions 1-3 (20 points par question).

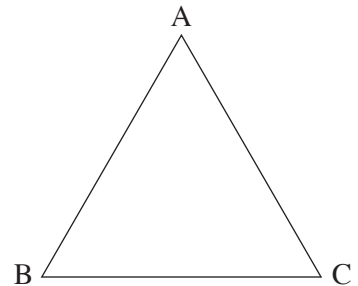
Attention : Si vous répondez à plus de deux questions, seules les deux premières réponses de votre copie seront corrigées.

1. La figure suivante représente un parcours cycliste en forme de triangle équilatéral ABC , dont la longueur du côté est de a mètres.

Un jour donné, deux cyclistes sont partis en même temps du point A vers le point B .

Il ont roulé dans la même direction tout au long du parcours triangulaire.

Chacun d'eux a roulé à une vitesse constante. La vitesse du cycliste α était supérieure de 2 mètres par seconde à la vitesse du cycliste β .



Lorsque le cycliste α a atteint le point A après avoir complété deux fois le parcours triangulaire, le cycliste β a atteint le point B pour la deuxième fois.

α . Déterminez la vitesse de chacun des cyclistes.

β . À quel point du triangle le cycliste β se trouvera-t-il lorsque le cycliste α atteindra le point A après avoir complété 5 fois le parcours triangulaire ?

Lorsque le cycliste α a atteint le point A après avoir complété 5 fois le parcours, il a fait demi-tour puis a commencé à rouler dans la direction opposée – du point A vers le point C – sans modifier sa vitesse.

Le cycliste β a continué à rouler dans le sens d'origine, sans modifier sa vitesse.

Les cyclistes se sont croisés au point M .

α . Déterminez sur quel côté du triangle se trouve le point M , puis déterminez selon quel rapport le point M partage le côté que vous avez déterminé.

Le lendemain, les cyclistes sont à nouveau partis du point A et ont roulé vers le point B , puis ils ont continué à rouler sur le parcours triangulaire. Chacun d'eux a roulé à la même vitesse que celle de la journée précédente. Le cycliste α a dépassé le cycliste β pour la première fois, 6 minutes après qu'ils ont pris la route.

β . Déterminez le périmètre du triangle. Justifiez votre réponse.

2. Soit la suite a_n vérifiant la relation : $a_{n+1} + a_n = 6n + 5$ pour tout n .
- Démontrez que $a_{n+2} = a_n + c$ est vérifié (c étant un nombre constant), puis déterminez c .
 - Donnez l'exemple d'une suite a_n qui vérifie la relation et qui n'est pas une suite arithmétique (donnez au moins les 4 premiers termes de cette suite).

Il est donné que toute la suite a_n est arithmétique.

- Calculez a_1 .

On a construit une nouvelle suite comportant $2n + 1$ termes :

$$a_1 - 1, a_2 - 2, a_3 - 3, \dots, a_{2n+1} - (2n + 1)$$

Le terme du milieu de la nouvelle suite est 43.

- Calculez la somme de la nouvelle suite.

3. Une boîte contient 12 boules bleues, 20 boules rouges et 8 boules jaunes.
- Le chiffre 1 est inscrit sur 28 des boules, et le chiffre 0 est inscrit sur le reste des boules.
- $\frac{1}{4}$ des boules sur lesquelles le chiffre 1 est inscrit sont jaunes.
- Le nombre de boules rouges sur lesquelles le chiffre 1 est inscrit est 4 fois supérieur au nombre de boules bleues sur lesquelles le chiffre 0 est inscrit.

Dany tire une boule de la boîte au hasard.

- Quelle est la probabilité que la boule que Dany a tirée soit une boule bleue sur laquelle le chiffre 1 est inscrit ?
- Si on admet que Dany a tiré au hasard une boule bleue ou une boule sur laquelle le chiffre 1 est inscrit, quelle est la probabilité que Dany ait tiré une boule sur laquelle le chiffre 0 est inscrit ?

Dany a remis la boule dans la boîte, et à présent il joue à un jeu : il tire une boule de la boîte au hasard, il note le chiffre qui y est inscrit, puis il remet la boule dans la boîte.

À chaque fois qu'il tire une boule sur laquelle le chiffre 1 est inscrit, il marque un point.

Il arrêtera de jouer lorsqu'il aura totalisé 5 points.

- Quelle est la probabilité que Dany totalise 5 points au terme de 6 tirages exactement ?

Deuxième partie – Géométrie et trigonométrie planes (20 points)

Répondez à l'une des questions 4-5 .

Attention : Si vous répondez à plus d'une question, seule la première réponse de votre copie sera corrigée.

4. AB est le diamètre d'un cercle. CD et AF sont deux cordes parallèles du cercle.

AB et CD se coupent en un point K (voir figure).

Il est donné que $\widehat{CA} = \widehat{AF}$ (les arcs marqués sur la figure).

א. (1) Démontrez que $\angle FAB = \angle CAB$.

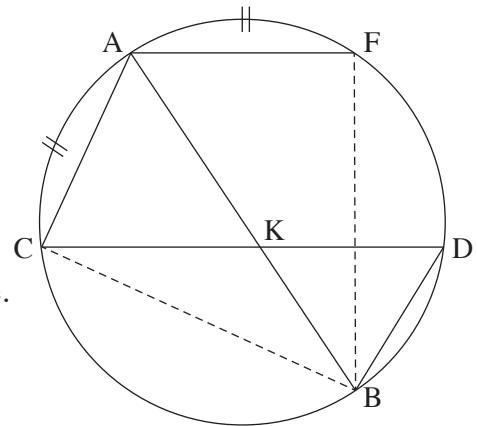
(2) Démontrez que $BK = BD$.

ב. Démontrez que le quadrilatère AFKC est un losange.

ג. Il est donné également que $BD \cdot AB = CD \cdot AC$.

(1) Démontrez que $\triangle BDC \sim \triangle CAB$.

(2) Démontrez que CD est le diamètre du cercle.



5. Soit le rectangle ABCD . Le point E se trouve sur la diagonale AC (voir figure).

Données : $\angle DAC = \alpha$,

$\angle ADE = \beta$.

R_1 est le rayon du cercle circonscrit au rectangle ABCD .

R_2 est le rayon du cercle circonscrit au triangle ADE .

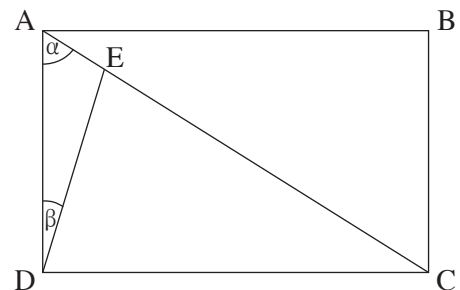
א. Exprimez le rapport $\frac{R_1}{R_2}$ en fonction de α et de β .

ב. Montrez que si $\alpha = \beta$, alors $\frac{R_1}{R_2} < 2$.

ג. Données : $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 15^\circ$.

(1) Montrez que $\triangle DEC$ est un triangle isocèle.

(2) Exprimez BE^2 en fonction de R_1 .



Troisième partie – Calcul différentiel et intégral de polynômes, de fonctions racines, de fonctions rationnelles et de fonctions trigonométriques (40 points)

Répondez à deux des questions 6-8 (20 points par question).

Attention : Si vous répondez à plus de deux questions, seules les deux premières réponses de votre copie seront corrigées.

6. Soit la fonction $f(x) = a \cdot \cos 2x + \sin^2 x$, définie dans l'intervalle $-\pi \leq x \leq \pi$. a est un paramètre.
- א. La fonction $f(x)$ est-elle paire ou impaire ou ni paire ni impaire ? Justifiez.
 - ב. Quelles sont les coordonnées des points d'extremum de la fonction $f(x)$ (exprimez en fonction de a si cela est nécessaire), si l'on sait que la fonction n'est pas constante ? Déterminez leur type en fonction de la valeur de a (considérez les deux possibilités pour a).
 - ג. Déterminez la valeur de a pour laquelle la fonction $f(x)$ est constante. Justifiez.

Donnée : $a > 1$.

- ד. (1) Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.
- (2) Tracez une esquisse du graphe de la fonction dérivée $f'(x)$.
- ה. Il est donné que l'aire délimitée par le graphe de la fonction dérivée $f'(x)$ et l'axe des abscisses vaut 12. Déterminez a .

7. Soit un cercle de diamètre AB . Le rayon du cercle vaut 10. Le point P se trouve sur le diamètre AB , entre le centre du cercle et le point B .

On trace une perpendiculaire à AB passant par le point P et coupant le cercle aux points C et D .

Déterminez l'aire maximale du triangle ACD .

8. Soit la fonction $f(x) = \frac{x^2 + bx - c}{x^2 - 4}$. c et b sont des paramètres.

א. Déterminez le domaine de définition de la fonction $f(x)$.

Il est donné que la fonction $f(x)$ est paire.

ב. Déterminez b .

Donnée : entre ses deux asymptotes verticales, le graphe de la fonction $f(x)$ admet deux points d'intersection avec l'axe des abscisses.

ג. Déterminez l'intervalle de valeurs de c .

ד. (1) Déterminez les coordonnées du point d'extremum de la fonction $f(x)$, puis déterminez son type (exprimez en fonction de c si nécessaire).

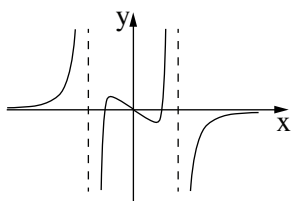
(2) Déterminez l'asymptote horizontale de la fonction $f(x)$, puis tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.

ה. Soit la fonction $g(x) = f(x) \cdot f'(x)$ définie dans le même domaine que les fonctions $f(x)$ et $f'(x)$.

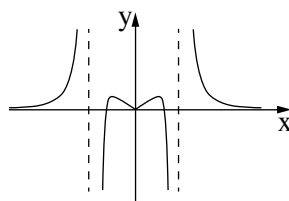
Voici trois graphes I-III.

(1) Lequel des graphes I-III est le graphe de la fonction $g(x)$? Justifiez.

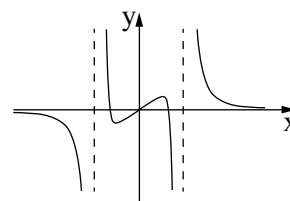
(2) Exprimez en fonction de c , l'aire délimitée par le graphe de la fonction $g(x)$ et par l'axe des abscisses.



III



II



I

Bonne chance!

Tous droits réservés à l'État d'Israël.
Toute copie ou publication est interdite sans l'autorisation du
Ministère de l'Éducation.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך