

Matemáticas

5 unidades de estudio – Segundo cuestionario

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון שני

Instrucciones para el examen

א. Duración del examen: Dos horas y cuarto.

ב. Estructura del cuestionario y clave de la evaluación:

Este cuestionario consta de dos partes.

Primera parte – Geometría analítica, vectores, trigonometría del espacio, números complejos

$$2 \times 33 \frac{1}{3} - 66 \frac{2}{3} \text{ puntos}$$

Segunda parte – Crecimiento y decrecimiento, funciones potencia funciones exponenciales y logarítmicas

$$1 \times 33 \frac{1}{3} - 33 \frac{1}{3} \text{ puntos}$$

$$\text{Total} - 100 \text{ puntos}$$

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שתיים ורבע.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שני פרקים.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

$$66 \frac{2}{3} - 33 \frac{1}{3} \times 2 \text{ נקודות}$$

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

$$33 \frac{1}{3} - 33 \frac{1}{3} \times 1 \text{ נקודות}$$

$$\text{סה"כ} - 100 \text{ נקודות}$$

ג. Material auxiliar permitido:

- (1) Una calculadora no gráfica. No se admite la posibilidad de programación con calculadoras programables. El uso de calculadora gráfica o de la posibilidad de programación de las calculadoras programables puede causar la anulación del examen.
- (2) Hojas de fórmulas (adjuntas).
- (3) Diccionario hebreo-lengua extranjera / lengua extranjera-hebreo.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש

באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות

במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

(3) מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. Instrucciones especiales:

- (1) No copies la pregunta; indica sólo su número.
- (2) Inicia cada respuesta a una nueva pregunta en una nueva hoja. Indica en el cuadernillo las etapas de la resolución, aun en el caso en que realices tus cálculos utilizando la calculadora. Explica detalladamente y de forma clara y ordenada, todas tus operaciones, incluidos los cálculos. La falta de detalles puede perjudicar la nota o causar la anulación del examen.

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי

הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה

ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד

המשמש טיוטה.

כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום

לפסילת הבחינה.

Escribe en el cuadernillo del examen solamente. Escribe "טיוטה" en el encabezado de toda página usada de borrador.

La escritura de borrador en páginas que no están en el cuadernillo del examen podría causar la anulación del examen.

בהצלחה!

¡Buena Suerte!

Preguntas

Presta atención: Explica detalladamente y de forma clara y ordenada, todas tus operaciones, incluidos los cálculos. La falta de detalles puede perjudicar la nota o causar la anulación del examen.

Primera parte — Geometría analítica, vectores, trigonometría del espacio, números complejos ($66\frac{2}{3}$ puntos)

Responde a dos de las preguntas 1 – 3 (cada pregunta $33\frac{1}{3}$ puntos).

Presta atención: Si respondes a más de dos preguntas, solo las dos primeras respuestas de tu cuadernillo serán tenidas en cuenta para la corrección.

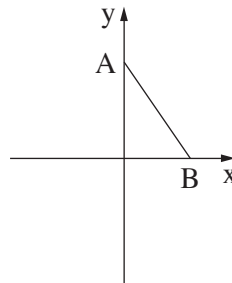
1. La longitud del segmento AB es 4.

Dato: El punto A se halla sobre el eje y, y el punto B se halla sobre el eje x (ver dibujo).

El punto M es el punto medio del segmento AB.

א. Halla la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos M que se construyeron de ese modo, e identifica dicho lugar geométrico.

Dato: El punto L se halla sobre el segmento AB de tal modo que $\frac{AL}{LB} = t$. $t > 0$ es un parámetro.



- ב. Expresa por medio de t la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos L que se construyeron de ese modo, e identifica dicho lugar geométrico.
- ג. ¿Para qué valor de t el lugar geométrico que hallaste en el apartado ב es congruente con el lugar geométrico que hallaste en el apartado א? Justifica tu respuesta.
- ד. ¿Existe un $t > 0$ para el cual el lugar geométrico que hallaste en el apartado ב corta al eje x en el punto $(5, 0)$? Justifica tu respuesta.

2. ABCDA'B'C'D' es un cubo cuyo lado es de longitud 6 (ver dibujo).

El punto B se halla en el origen de las coordenadas.

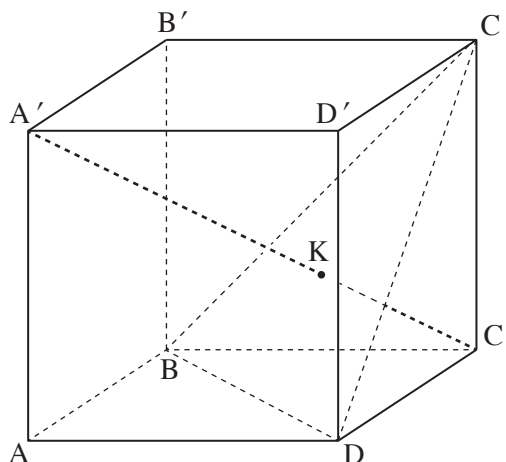
- א. Calcula la magnitud del ángulo que se halla entre el segmento A'C y el segmento BC'.
- ב. Demuestra que la recta A'C es perpendicular al plano BC'D.

El punto K es el punto de intersección de la recta A'C con el plano BC'D.

- ג. Halla la relación $\frac{A'K}{A'C}$.

El punto O es el punto de intersección de la diagonal de la base AC con la diagonal de la base BD.

- ד. Demuestra que el punto K se halla sobre el segmento C'O.



3. א. (1) Demuestra que para todo número complejo z se cumple que $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.
(2) Demuestra que si el número complejo z se halla sobre la circunferencia unidad, entonces también $\frac{1}{z}$ se halla sobre la circunferencia unidad.
- ב. (1) Muestra que para todo número complejo z que se halla sobre la circunferencia unidad, la suma $z + \frac{1}{z}$ es un número real.
(2) z_1 y z_2 son números complejos que se hallan sobre la circunferencia unidad. Se sabe que las componentes imaginarias de z_1 y z_2 son positivas. Demuestra que si $z_1 + \frac{1}{z_1} + z_2 + \frac{1}{z_2} > 2$ entonces z_1 y z_2 se hallan en el primer cuadrante.

$w = 1 \cdot \text{cis}(\alpha)$ es un número complejo. Dato: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Se da una progresión geométrica cuyo primer término es $\frac{1}{w}$ y el segundo w .

Se sabe que la suma de los 5 primeros términos de la progresión geométrica es 0.

- ג. (1) Expresa por medio de α la razón de la progresión, y explica por qué todos los términos de la progresión se hallan sobre la circunferencia unidad.
(2) Halla α (halla las dos posibilidades).

Segunda parte — Crecimiento y decrecimiento, funciones potencia exponenciales y logarítmicas ($33\frac{1}{3}$ puntos)

Responde a una de las preguntas 4 – 5.

Presta atención: Si respondes a más de una pregunta, sólo la primera respuesta de tu cuadernillo será tomada en cuenta para la corrección.

4. Se da la función: $f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{e^x + 1}\right)$, definida para todo x .

- א. (1) Halla las coordenadas de los puntos de intersección del gráfico de la función $f(x)$ con los ejes (si los hubiere).
- (2) Halla los intervalos de positividad y de negatividad de la función $f(x)$ (si los hubiere).
- (3) Halla la ecuación de la asíntota de la función $f(x)$, que es paralela al eje x .
- (4) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x)$ (si los hubiere).

ב. Traza un esbozo del gráfico de la función $f(x)$.

- ג. (1) Demuestra que $f(x) = x - \ln(e^x + 1)$.
- (2) Explica por qué el gráfico de la función $f(x)$ se halla en su totalidad debajo de la recta $y = x$.

ד. Se da la función $g(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x + 1}}$ definida para todo x .

- (1) ¿Cuáles son los intervalos de positividad y de negatividad de la función $g(x)$ (si los hubiere)?
- (2) $a > 1$ es un parámetro.

Válete de la derivada de la función $f(x)$ y muestra que el volumen del cuerpo de revolución de la superficie limitada por el gráfico de la función $g(x)$, por los ejes y por la recta $x = \ln a$ es igual a $\pi \ln\left(\frac{2a}{a+1}\right)$. Detalla tus cálculos.

5. Se da la familia de funciones $f(x) = \frac{e^{-mx}}{1+x^2}$. m es un parámetro.

Responde a los apartados א- ג. para $m \geq 0$.

- א. (1) ¿Cuál es el dominio de definición de las funciones $f(x)$?
- (2) Halla los intervalos de positividad y de negatividad de la función $f(x)$ (si los hubiere). Justifica tu respuesta.
- (3) Se sabe que todas las funciones $f(x)$ de la familia se cortan entre sí en un punto. Halla sus coordenadas.

ב. (1) Para $m \geq 0$, halla los valores de m para los cuales la derivada, $f'(x)$:

- (i) no se anula en ningún punto.
- (ii) se anula solamente en un punto.
- (iii) se anula exactamente en dos puntos.

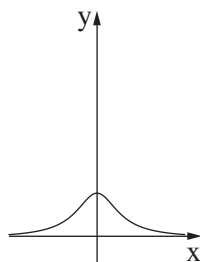
(2) Al final de la pregunta se dan tres gráficos (I-III) de funciones de la familia $f(x)$ para $m \geq 0$.

Se sabe que $m \neq 1$ y cada uno de los gráficos corresponde a un valor o a un rango de valores distinto de m .

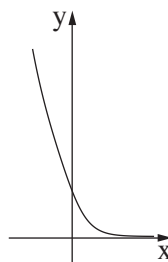
Haz corresponder a cada uno de los tres gráficos el valor o el rango de valores de m que le corresponda. Justifica tu respuesta.

Responde al apartado ג. Puedes valerte del gráfico adecuado de entre los gráficos I-III.

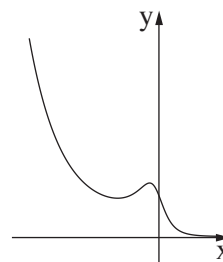
ג. (1) Traza un esbozo del gráfico de la función $f(-x)$ para $0 < m < 1$.



III



II



I

¡Buena Suerte!

Los derechos de autor están reservados al Estado de Israel.
Se prohíbe su copia o publicación salvo la autorización expresa
del Ministerio de Educación.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך