

## Matemáticas

### 5 unidades de estudio-Primer cuestionario

#### Instrucciones para el examen

א. Duración del examen: Tres horas y media.

ב. Estructura del cuestionario y clave de la evaluación:

Este cuestionario consta de tres partes.

Primera parte – Álgebra y Probabilidad

– 2x20 – 40 puntos

Segunda parte – Geometría y Trigonometría del plano

– 1x20 – 20 puntos

Tercera parte – Cálculo diferencial e integral de polinomios, de funciones radical, de funciones racionales y de funciones trigonométricas.

– 2x20 – 40 puntos

Total – 100 puntos

ג. Material auxiliar permitido :

- (1) Una calculadora no gráfica. No se admite la posibilidad de programación con calculadoras programables. El uso de calculadora gráfica o de la posibilidad de programación de las calculadoras programables puede causar la anulación del examen.
- (2) Hojas de fórmulas (adjuntas).
- (3) Diccionario hebreo-lengua extranjera / lengua extranjera-hebreo.

ד. Instrucciones especiales:

- (1) No copies la pregunta; indica sólo su número.
- (2) Inicia cada respuesta a una nueva pregunta en una nueva hoja. Indica en el cuadernillo las etapas de la resolución, aun en el caso en que realices tus cálculos utilizando la calculadora.  
Explica detalladamente y de forma clara y ordenada, todas tus operaciones, incluidos los cálculos. La falta de detalles puede perjudicar la nota o causar la anulación del examen.

Escribe en el cuadernillo del examen solamente. Escribe "טיטה" en el encabezado de toda página usada de borrador.

La escritura de borrador en páginas que no están en el cuadernillo del examen podría causar la anulación del examen.

## מתמטיקה

### 5 יחידות לימוד - שאלון ראשון

#### הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות –

$20 \times 2 - 40$  נקודות

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

$20 \times 1 - 20$  נקודות

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות  $20 \times 2 - 40$  נקודות

סה"כ 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).
- (3) מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
- (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיטה" בראש כל עמוד המשמש טיטה.

כתיבת טיטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

**בהצלחה!**

**¡Buena Suerte!**

## Preguntas

**Presta atención:** Explica detalladamente y de forma clara y ordenada, todas tus operaciones, incluidos los cálculos.

**La falta de detalles puede perjudicar la nota o causar la anulación del examen.**

### Primera parte – Álgebra y Probabilidad (40 puntos)

Responde a dos de las preguntas 1 – 3 (cada pregunta – 20 puntos).

**Presta atención:** Si respondes a más de dos preguntas, solo las dos primeras respuestas de tu cuadernillo serán tenidas en cuenta para la corrección.

1. En una panadería hay dos máquinas para la producción de pasteles:

la máquina I y la máquina II.

Cada una de las máquinas produce pasteles a un ritmo constante propio.

El domingo el tiempo de trabajo de las dos máquinas fue igual.

El domingo la máquina I produjo 80 pasteles más que el número de pasteles que produjo la máquina II.

El lunes produjo la máquina II el mismo número de pasteles que produjo la máquina I el domingo, y la máquina I produjo el mismo número de pasteles que produjo la máquina II el domingo.

El lunes el tiempo de trabajo de la máquina II fue  $\frac{25}{9}$  veces más largo que el tiempo de trabajo de la máquina I en el mismo día.

⌘. Calcula cuántos pasteles en total fueron producidos por las dos máquinas el domingo.

Indicaremos:  $T_1$  - el tiempo que necesita la máquina I para producir un pastel,

$T_2$  - el tiempo que necesita la máquina II para producir un pastel.

⌘. Calcula la razón  $\frac{T_1}{T_2}$ . Justifica tu respuesta.

- ⌘. (1) Durante cierto período de tiempo la máquina I produjo exactamente 47 pasteles.  
¿Cuántos pasteles enteros fueron producidos por la máquina II en el mismo período de tiempo? Justifica tu respuesta.
- (2) Se sabe que las dos máquinas trabajaron el mismo período de tiempo, y cada una de ellas produjo un número entero de pasteles.  
¿Es posible que durante ese período de tiempo las dos máquinas hayan producido 26 pasteles? Justifica tu respuesta.

/Continúa en la página 3/

2.  $a_n$  es una progresión geométrica infinita cuya razón es  $q$ .  $|q| \neq 1$ .

Dato:  $a_3 \cdot a_7 = 1$ .

- א. Calcula  $a_5$  (halla las dos posibilidades).

Dato:  $a_5 > 0$ .

- ב. (1) Expresa  $a_1$  por medio de  $q$ .

(2) ¿Existe un  $n$  natural para el cual  $a_n = \frac{1}{a_1}$ ? En caso afirmativo, hállolo. En caso negativo, justifica tu respuesta.

(3) ¿Existe un  $n$  natural para el cual  $a_n = \frac{1}{a_{13}}$ ? En caso afirmativo, hállolo. En caso negativo, justifica tu respuesta.

- ג. (1) Expresa por medio de  $q$  los 7 primeros miembros de la progresión  $a_n$ .

(2) Dato:  $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k = 1$  ( $k$  es un número natural).

Halla el valor de  $k$ , y explica por qué él es el único valor posible de  $k$ .

3. Gali y Neta juegan un juego en el cual es posible determinar el número de vueltas. En cada vuelta una de ellas gana y la otra pierde. La vencedora en todo el juego será aquella que gane más vueltas que su compañera.

Si ambas han ganado el mismo número de vueltas, entonces el resultado de todo el juego será empate.

Dato: En cada vuelta la probabilidad de que Neta gane es  $\frac{1}{3}$ .

- א. El domingo jugaron Gali y Neta 4 vueltas en el juego.

(1) ¿Cuál es la probabilidad de que Neta sea la vencedora de todo el juego?

(2) ¿Cuál es la probabilidad de que haya empate en todo el juego?

- ב. También el lunes jugaron Gali y Neta 4 vueltas en el juego. Esta vez ellas decidieron al comienzo que si el resultado del juego de 4 vueltas fuera empate, entonces jugarían otras 3 vueltas para desempatar, y quien ganara más vueltas sería la vencedora de todo el juego.

¿Cuál es la probabilidad de que Neta sea la vencedora de todo el juego?

- ג. Se sabe que Neta fue la vencedora de todo el juego exactamente en uno de los dos días: domingo o lunes.

¿Cuál es la probabilidad de que ella haya sido la vencedora en el juego el lunes?

## Segunda parte – Geometría y Trigonometría del plano (20 puntos)

Responde a una de las preguntas 4 – 5 .

**Presta atención:** Si respondes a más de una pregunta, sólo la primera respuesta de tu cuadernillo será tenida en cuenta para la corrección.

4. EG es una cuerda en una circunferencia de centro M y radio r .

Por los puntos E y G se trazaron tangentes a la circunferencia.

Por el centro de la circunferencia, M , se trazó una recta paralela a la cuerda EG que corta a las tangentes en los puntos K y L , como se muestra en el dibujo.

Por el centro de la circunferencia, M , se trazó una perpendicular a KL la cual corta a la cuerda EG en el punto T y a la circunferencia en los puntos H e I , como se muestra en el dibujo.

Indicaremos:  $TG = a$  .

⌘. (1) Demuestra que:  $TG \cdot ML = MG^2$  .

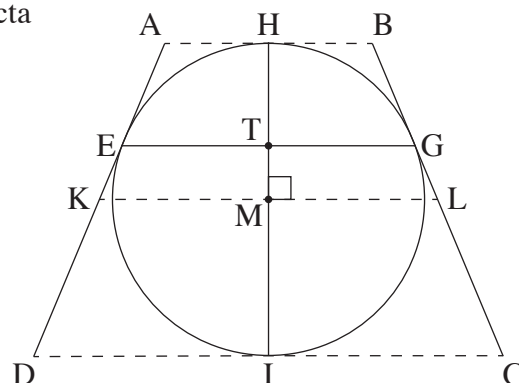
(2) Expresa la longitud del segmento KL por medio de a y r .

Por los puntos H e I se trazaron tangentes a la circunferencia de manera tal que se formó el trapecio isósceles ABCD el cual inscribe a la circunferencia, como se muestra en el dibujo.

⌘. (1) Demuestra que:  $BC = KL$  .

(2) Expresa el perímetro del trapecio ABCD por medio de a y r .

⌘. ¿La razón entre el perímetro del trapecio ABCD y el perímetro de la circunferencia puede ser menor que  $\frac{4}{\pi}$  ? Justifica tu respuesta.

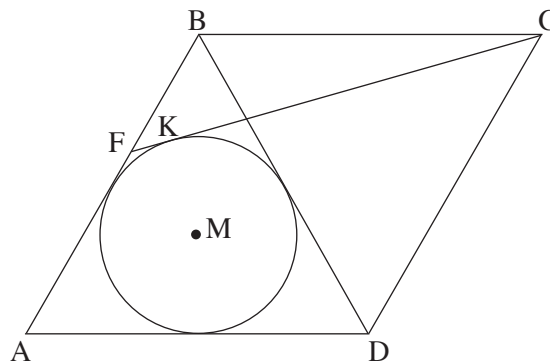


5. ABCD es un rombo cuyo lado tiene longitud a .

Dato:  $\angle BAD = 60^\circ$  .

En el triángulo ABD está inscrita una circunferencia de centro M .

Desde el vértice C se trazó una tangente a la circunferencia cuya prolongación corta el lado AB en el punto F y es tangente a la circunferencia en el punto K (ver dibujo).



⌘. Expresa por medio de a el radio de la circunferencia.

⌘. (1) Explica por qué el punto M se halla sobre la diagonal del rombo AC .

(2) Calcula la magnitud del ángulo ACF .

⌘. Expresa por medio de a el área del triángulo ACF.

**Tercera parte – Cálculo diferencial e integral de polinomios,  
de funciones radical, de funciones racionales  
y de funciones trigonométricas (40 puntos)**

Responde a dos de las preguntas 6 - 8 (cada pregunta – 20 puntos).

**Presta atención:** Si respondes a más de dos preguntas, solo las dos primeras respuestas en tu cuadernillo serán tenidas en cuenta para su corrección.

6. Se da la familia de las funciones:  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{2x - a}$ .  $a$  es un parámetro que cumple  $-4 < a < 2$ .

- א. (1) Halla el dominio de definición de la función  $f(x)$ .
- (2) Explica por qué la función  $f(x)$  no tiene asíntota paralela al eje  $y$ .
- (3) Halla las ecuaciones de las asíntotas de la función  $f(x)$  paralelas al eje  $x$ .
- (4) ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos de intersección del gráfico de la función  $f(x)$  con los ejes?
- (5) Halla los intervalos de positividad y de negatividad de la función  $f(x)$ .
- ב. (1) Expresa por medio de  $a$  las coordenadas  $x$  para las cuales  $f'(x) = 0$  (si las hubiera).
- (2) Halla el valor de  $a$  para el cual  $f'(x) \neq 0$  para todo  $x$  en el dominio de definición.

Sustituye  $a = -1$  en la ecuación de la función  $f(x)$  y responde a los apartados ג-ד.

- ג. (1) ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función  $f(x)$  (si los hubiera)?
- (2) Traza un esbozo del gráfico de la función  $f(x)$ .

ד. Calcula  $\int_3^4 \frac{1}{f(x)} dx$ . Puedes dejar la raíz en tu respuesta.

7. Se da la función  $f(x) = x^3 \sin x$  definida en el dominio  $-\pi \leq x \leq \pi$ .

א. (1) Determina si la función  $f(x)$  es par, impar, o ni par ni impar.

Justifica tu respuesta.

(2) Halla las coordenadas de los puntos de intersección del gráfico de la función  $f(x)$  con el eje  $x$  en el intervalo dado.

(3) Explica por qué la función  $f(x)$  es no-negativa en el intervalo dado.

(4) Determina si la función derivada,  $f'(x)$ , es par, impar o ni par ni impar.

Justifica tu respuesta.

ב. (1) Muestra que las coordenadas  $x$  para las cuales  $f'(x) = 0$  cumplen  $\tan x = -\frac{1}{3}x$ .

(2) En el dibujo que te presentamos se describen los gráficos de las funciones

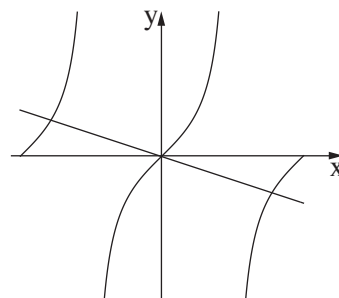
$$h(x) = -\frac{1}{3}x \text{ y } g(x) = \tan x$$

en el intervalo  $-\pi \leq x \leq \pi$ .

Basándote en el dibujo,

determina cuántos puntos en el

intervalo  $-\pi \leq x \leq \pi$  cumplen  $f'(x) = 0$ .



Dato: la coordenada  $x$  de uno de los puntos

extremo de la función  $f(x)$  es aproximadamente 2.46.

Responde a los apartados ג-ז para el intervalo  $-\pi \leq x \leq \pi$ .

ג. (1) ¿Cuáles son las coordenadas  $x$  de todos los puntos extremo de la función  $f(x)$  en el intervalo? Justifica tu respuesta y determina su tipo.

(2) Traza un esbozo del gráfico de la función  $f(x)$  en el intervalo.

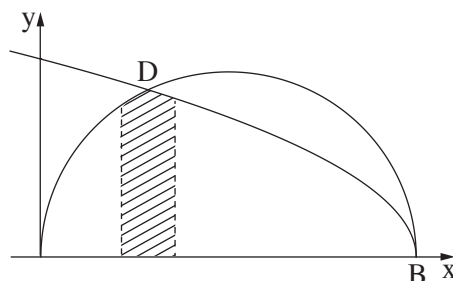
ז. (1) Traza un esbozo del gráfico de la función derivada,  $f'(x)$ , en el intervalo.

(2) ¿Cuántos puntos de inflexión como mínimo tiene la función  $f(x)$  en el intervalo?

Justifica tu respuesta.

8. En el dibujo que te presentamos se describen los gráficos de las funciones  $f(x) = \sqrt{-x^2 + 7x}$  y  $g(x) = \sqrt{14 - 2x}$ .

El gráfico de la función  $f(x)$  corta al eje  $x$  en el origen de coordenadas y en el punto  $B$ , y corta al gráfico de la función  $g(x)$  en los puntos  $B$  y  $D$ , como se describe en el dibujo.



- א. (1) Halla los dominios de definición de las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$ .

- (2) Halla las coordenadas  $x$  de los puntos  $B$  y  $D$ .

$a$  es un parámetro que cumple  $1 \leq a \leq 2$ .

La superficie limitada por los gráficos de las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$ , por las verticales  $x = a$  y  $x = a + 1$  y por el eje  $x$ , rota alrededor del eje  $x$ .

- א. (1) Calcula el valor de  $a$  para el cual el volumen del cuerpo de revolución que se produce es máximo.
- (2) Halla el valor de  $a$  para el cual el volumen del cuerpo de revolución que se produce es mínimo.

Si hay necesidad, deja en tus respuestas dos cifras decimales.

**¡Buena Suerte!**

Los derechos de autor están reservados al Estado de Israel.  
Se prohíbe su copia o publicación salvo la autorización expresa  
del Ministerio de Educación.

**בהצלחה!**

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל  
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך