

Математика

5 единиц обучения – второй вопросник

Указания экзаменуемым

- а. Продолжительность экзамена: 2 часа 15 минут.
- б. Строение вопросника и ключ к оценке:
В этом вопроснике два раздела.
Раздел первый: аналитическая геометрия, векторы, тригонометрия в пространстве, комплексные числа –
 $2 \times 33\frac{1}{3} - 66\frac{2}{3}$ балла
Раздел второй: рост и затухание, степенные функции, показательные и логарифмические функции –
 $1 \times 33\frac{1}{3} - 33\frac{1}{3}$ балла
Всего – 100 баллов

в. Разрешенный вспомогательный материал:

1. Калькулятор без графического дисплея. При работе с калькулятором, который предоставляет возможности программирования, запрещается использовать эти возможности. Использование калькулятора с графическим дисплеем или возможностей программирования может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.
2. Листы с формулами (прилагаются).
3. Словарь по выбору экзаменующегося.

г. Особые указания:

1. Не переписывайте вопрос; обозначьте только его номер.
2. Начинайте ответ на каждый вопрос с новой страницы. Запишите в тетради этапы решения (также и в том случае, когда вычисления производились с помощью калькулятора). Объясните все свои действия, включая вычисления, подробно, в ясной и упорядоченной форме. Недостаточно подробная запись решения может привести к тому, что оценка за экзамен будет снижена или экзамен будет аннулирован.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טייטה" בראש כל עמוד המשמש טייטה.
תתיבת טייטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Пишите только в экзаменационной тетради. Напишите слово «טייטה» в начале каждой страницы, отведенной вами под черновик. Выполнение любых черновых записей на листах, не относящихся к экзаменационной тетради, может привести к тому, что экзамен будет аннулирован!

Желаем успеха!

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון שני

הוראות לנבחן

- א. משך הבחינה: שתיים ורבע.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:
בשאלון זה שני פרקים.
פרק ראשון: גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים
 $2 \times 33\frac{1}{3} - 66\frac{2}{3}$ נקודות
פרק שני: גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות
 $1 \times 33\frac{1}{3} - 33\frac{1}{3}$ נקודות
סה"כ – 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).
3. מילון לפי בחירת הנבחן.

ד. הוראות מיוחדות:

1. אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
2. התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

בהצלחה!

Вопросы

Обратите внимание: объясняйте все ваши действия, включая вычисления, подробным и ясным образом.

Недостаточная детализация может снизить вашу оценку или привести к аннулированию экзамена.

Раздел первый – аналитическая геометрия, векторы, тригонометрия в пространстве, комплексные числа ($66\frac{2}{3}$ балла)

Ответьте на два из вопросов 1-3 (за каждый вопрос – $33\frac{1}{3}$ балла).

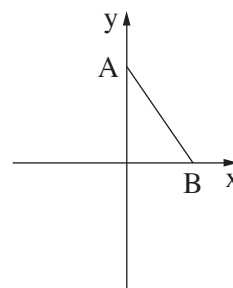
Обратите внимание: если вы ответите более чем на два вопроса, будут проверены только первые два из ответов в вашей тетради.

1. Длина отрезка AB равна 4 .

Дано: точка A расположена на оси y ,

точка B расположена на оси x (смотрите чертеж).

Точка M – середина отрезка AB .



($\aleph$) Найдите уравнение геометрического места всех точек M ,

построенных подобным образом, и идентифицируйте это геометрическое место.

Дано: точка L – такая точка на отрезке AB , что $\frac{AL}{LB} = t$. $t > 0$ – параметр.

($\beth$) Выразите при помощи t уравнение геометрического места всех точек L ,
построенных подобным образом, и идентифицируйте это геометрическое место.

($\aleph$) При каком значении t геометрическое место, найденное вами при ответе на вопрос пункта ($\beth$), совпадает с геометрическим местом, найденном вами при ответе на вопрос пункта ($\aleph$)? Обоснуйте свой ответ.

($\beth$) Существует ли $t > 0$, при котором геометрическое место, найденное вами при ответе на вопрос пункта ($\beth$) , пересекает ось x в точке $(5, 0)$? Обоснуйте свой ответ.

2. ABCDA'B'C'D' – это куб, длина ребра которого равна 6 (смотрите чертеж).

Точка В находится в начале координат.

(а) Вычислите значение угла между отрезком A'C и отрезком BC'.

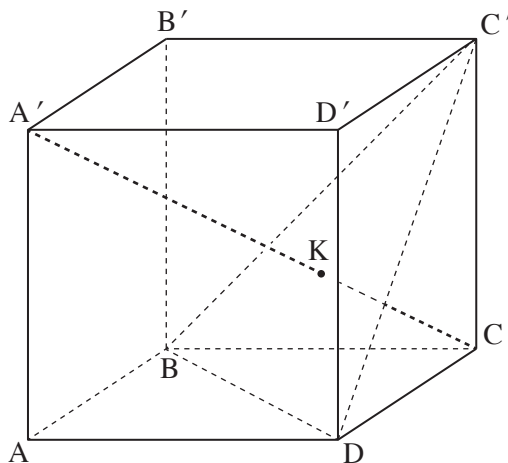
(б) Докажите, что прямая A'C перпендикулярна плоскости BC'D.

Точка К – точка пересечения прямой A'C с плоскостью BC'D.

(в) Найдите отношение $\frac{A'K}{A'C}$.

Точка О – точка пересечения диагонали основания AC с диагональю основания BD.

(г) Докажите, что точка К расположена на отрезке C'O.



3. (а) (1) Докажите, что для каждого комплексного числа z выполняется $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

(2) Докажите, что если комплексное число z находится на единичной окружности, то и число $\frac{1}{z}$ также находится на единичной окружности.

(б) (1) Покажите, что для каждого комплексного числа z , находящегося на единичной окружности, сумма $z + \frac{1}{z}$ является действительным числом.

(2) z_1 и z_2 – это комплексные числа, находящиеся на единичной окружности.

Дано, что мнимые компоненты чисел z_1 и z_2 являются положительными.

Докажите, что если $z_1 + \frac{1}{z_1} + z_2 + \frac{1}{z_2} > 2$, то z_1 и z_2 расположены в первом квадранте.

$w = 1 \cdot \text{cis}(\alpha)$ – это комплексное число. Дано: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Дана геометрическая прогрессия, первым членом которой является $\frac{1}{w}$,

а вторым членом является w .

Дано, что сумма первых 5 членов геометрической прогрессии равна 0.

(а) (1) При помощи α выразите знаменатель данной прогрессии и объясните, почему все члены данной прогрессии находятся на единичной окружности.

(2) Найдите α (найдите два возможных значения).

Раздел второй – рост и затухание, степенные функции, показательные и логарифмические функции ($33\frac{1}{3}$ балла)

Ответьте на один из вопросов 4-5 .

Обратите внимание: если вы ответите более чем на один вопрос, будет проверен только первый из ответов в вашей тетради.

4. Дана функция $f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{e^x + 1}\right)$, определенная для любого x .

- (а) (1) Найдите координаты точек пересечения графика функции $f(x)$ с осями координат (если таковые существуют).
- (2) Найдите области положительных и отрицательных значений функции $f(x)$ (если таковые существуют).
- (3) Найдите уравнение асимптоты функции $f(x)$, параллельной оси x .
- (4) Найдите области возрастания и убывания функции $f(x)$ (если таковые существуют).

(б) Начертите схематический график функции $f(x)$.

- (а) (1) Докажите, что $f(x) = x - \ln(e^x + 1)$.
- (2) Объясните, почему весь график функции $f(x)$ расположен ниже прямой $y = x$.

(г) Дана функция $g(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x + 1}}$, определенная для любого x .

- (1) Каковы области положительных и отрицательных значений функции $g(x)$ (если таковые существуют)?
- (2) $a > 1$ – параметр.

Воспользуйтесь производной функции $f(x)$ и покажите, что объем тела вращения фигуры, заключенной между графиком функции $g(x)$, осями координат и прямой $x = \ln a$, равен $\pi \ln\left(\frac{2a}{a+1}\right)$. Приведите подробные вычисления в своем ответе.

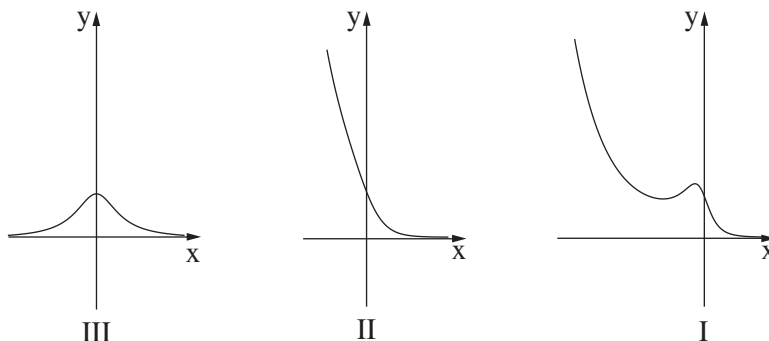
5. Дано семейство функций $f(x) = \frac{e^{-mx}}{1+x^2}$. m – параметр.

Ответьте на вопросы пунктов (א)-(ב) для $m \geq 0$.

- (א) (1) Какова область определения функций $f(x)$?
- (2) Найдите области положительных и отрицательных значений функций $f(x)$ (если таковые существуют). Обоснуйте свой ответ.
- (3) Дано, что графики всех функций $f(x)$ данного семейства пересекаются в одной точке. Найдите ее координаты.
- (ב) (1) Для $m \geq 0$ найдите значения m , при которых значение производной, $f'(x)$:
- (i) не равно нулю ни в какой точке.
- (ii) равно нулю в точности в одной точке.
- (iii) равно нулю в точности в двух точках.
- (2) В конце вопроса приведены три графика (I-III) функций из семейства $f(x)$ для $m \geq 0$.
- Известно, что $m \neq 1$ и что каждый из этих графиков соответствует другому значению или интервалу значений m .
- Для каждого из трех данных графиков найдите соответствующее ему значение или интервал значений m . Обоснуйте свой ответ.

Ответьте на вопрос пункта (א). Вы можете воспользоваться подходящим графиком из графиков I-III.

(א) Начертите схематический график функции $f(-x)$ для $0 < m < 1$.



Желаем успеха!

Авторские права принадлежат Государству Израиль.
Копировать или публиковать можно только
с разрешения Министерства просвещения.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.
אין להעתיק או לפרסם
אלא ברשות משרד החינוך.