

Mathématiques
5 unités d'étude - deuxième questionnaire

Instructions au candidat

- א. Durée de l'examen : deux heures et quart.
- ב. Structure du questionnaire et barème de notation :
Ce questionnaire comporte deux parties.
Première partie — Géométrie analytique, vecteurs, trigonométrie dans l'espace, nombres complexes.
 $2 \times 33 \frac{1}{3} - 66 \frac{2}{3}$ points
Deuxième partie — Croissance et décroissance, fonctions puissance, fonctions exponentielles et logarithmiques.
 $1 \times 33 \frac{1}{3} - 33 \frac{1}{3}$ points
Total — 100 points
- ג. Matériel auxiliaire autorisé :
(1) Calculatrice non graphique. Il est interdit d'utiliser les options de programmation d'une calculatrice programmable. L'utilisation d'une calculatrice graphique ou des options de programmation d'une calculatrice peut entraîner votre disqualification.
(2) Formulaires (joint au sujet).
(3) Dictionnaire hébreu-langue étrangère / langue étrangère-hébreu.
- ד. Instructions supplémentaires :
(1) Ne recopiez pas la question, indiquez seulement son numéro.
(2) Commencez chaque question sur une nouvelle page. Écrivez dans le cahier d'examen les étapes de la résolution, même lorsque les calculs se font à l'aide de la calculatrice. Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, en détail et de façon claire et ordonnée. Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Écrivez dans le cahier d'examen uniquement. Inscrivez "טייטה" en haut de chaque page de brouillon.
Écrire des notes de brouillon sur d'autres feuilles que celles du cahier d'examen, risque d'entraîner votre disqualification.

מתמטיקה
5 יחידות לימוד - שאלון שני

הוראות לנבחן

- א. משך הבחינה: שתיים ורבע.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:
בשאלון זה שני פרקים.
פרק ראשון — גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים
 $2 \times 33 \frac{1}{3} - 66 \frac{2}{3}$ נקודות
פרק שני — גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות
 $1 \times 33 \frac{1}{3} - 33 \frac{1}{3}$ נקודות
סה"כ — 100 נקודות
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
(2) דפי נוסחאות (מצורפים).
(3) מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.
- ד. הוראות מיוחדות:
(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טייטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

Bonne chance!

בהצלחה!

Questions

Attention : Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, de manière détaillée et claire.

Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Première partie - Géométrie analytique, vecteurs, trigonométrie dans l'espace et nombres complexes ($66\frac{2}{3}$ points)

Répondez à deux des questions 1-3 ($33\frac{1}{3}$ points par question).

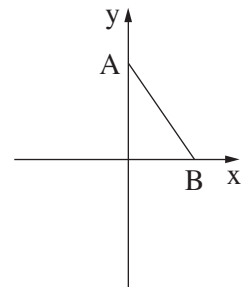
Attention : si vous répondez à plus de deux questions, seules les deux premières réponses de votre copie seront corrigées.

1. La longueur du segment AB est 4.

Données : le point A se trouve sur l'axe des ordonnées, et le point B se trouve sur l'axe des abscisses (voir figure).

Le point M est le milieu du segment AB.

⌘. Déterminez l'équation du lieu géométrique de tous les points M ainsi construits, puis identifiez ce lieu géométrique.



Données : le point L se trouve sur le segment AB de sorte que $\frac{AL}{LB} = t$.

$t > 0$ est un paramètre.

- ⌘. Exprimez, en fonction de t , l'équation du lieu géométrique de tous les points L ainsi construits, puis identifiez ce lieu géométrique.
- ⌘. Pour quelle valeur de t le lieu géométrique que vous avez déterminé à l'article ⌘ se confond avec le lieu géométrique que vous avez déterminé à l'article ⌘ ? Justifiez.
- ⌘. Existe-t-il un $t > 0$ pour lequel le lieu géométrique que vous avez déterminé à l'article ⌘ coupe l'axe des abscisses au point $(5, 0)$? Justifiez.

2. $ABCD A' B' C' D'$ est un cube dont la longueur de l'arête vaut 6 (voir figure).

Le point B se trouve sur l'origine du repère.

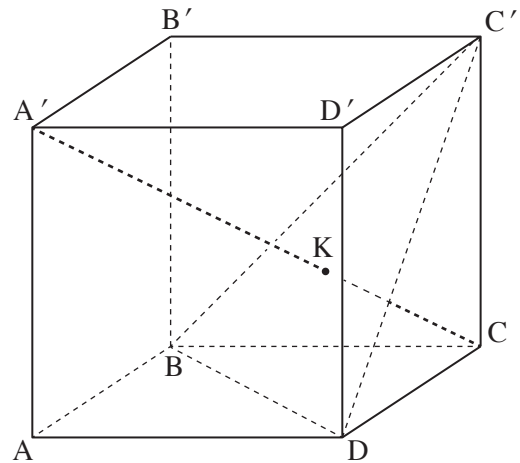
- ⌘. Calculez la mesure de l'angle formé par les segments $A'C$ et BC' .
- ⌚. Démontrez que la droite $A'C$ est perpendiculaire au plan $BC'D$.

Le point K est le point d'intersection de la droite $A'C$ avec le plan $BC'D$.

- ⌚. Déterminez le rapport $\frac{A'K}{A'C}$.

Le point O est le point d'intersection des diagonales AC et BD de la base.

- ⌚. Démontrez que le point K se trouve sur le segment $C'O$.



3. ⌘. (1) Démontrez que tout nombre complexe z vérifie $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.
- (2) Démontrez que si le nombre complexe z se trouve sur le cercle unité, alors le nombre $\frac{1}{z}$ se trouve également sur le cercle unité.
- ⌚. (1) Montrez que pour tout nombre complexe z se trouvant sur le cercle unité, la somme $z + \frac{1}{z}$ est un nombre réel.
- (2) z_1 et z_2 sont des nombres complexes se trouvant sur le cercle unité. On sait que les parties imaginaires de z_1 et z_2 sont positives.
- Démontrez que si $z_1 + \frac{1}{z_1} + z_2 + \frac{1}{z_2} > 2$ alors z_1 et z_2 se trouvent dans le premier quadrant.

$w = 1 \cdot \text{cis}(\alpha)$ est un nombre complexe. Donnée : $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Soit une suite géométrique dont le premier terme est $\frac{1}{w}$ et le deuxième terme est w .

On sait que la somme des 5 premiers termes de cette suite géométrique vaut 0.

- ⌚. (1) Exprimez la raison de la suite en fonction de α , puis expliquez pourquoi tous les termes de cette suite se trouvent sur le cercle unité.
- (2) Déterminez α (déterminez les deux possibilités).

Deuxième partie – Croissance et décroissance, fonctions puissance, fonctions exponentielles et logarithmiques (33 $\frac{1}{3}$ points)

Répondez à l'une des questions 4-5.

Attention : si vous répondez à plus d'une question, seule la première réponse de votre copie sera corrigée.

4. Soit la fonction : $f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{e^x + 1}\right)$, définie pour tout x .

- ⌘. (1) Déterminez les coordonnées des points d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ avec les axes (s'il en existe).
- (2) Déterminez les intervalles sur lesquels la fonction $f(x)$ est positive et ceux sur lesquels elle est négative (s'il en existe).
- (3) Déterminez l'équation de l'asymptote de la fonction $f(x)$ parallèle à l'axe des abscisses.
- (4) Déterminez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction $f(x)$ (s'il en existe).

⌘. Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.

- ⌘. (1) Démontrez que $f(x) = x - \ln(e^x + 1)$.
- (2) Expliquez pourquoi le graphe de la fonction $f(x)$ se trouve entièrement au-dessous de la droite $y = x$.

7. Soit la fonction $g(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x + 1}}$ définie pour tout x .

- (1) Quels sont les intervalles sur lesquels la fonction $g(x)$ est positive et ceux sur lesquels elle est négative (s'il en existe) ?
- (2) $a > 1$ est un paramètre.

En vous aidant de la dérivée de la fonction $f(x)$, démontrez que le volume du solide de révolution de l'aire délimitée par le graphe de la fonction $g(x)$, par les axes et par la droite $x = \ln a$ vaut $\pi \ln\left(\frac{2a}{a+1}\right)$. Détaillez vos calculs.

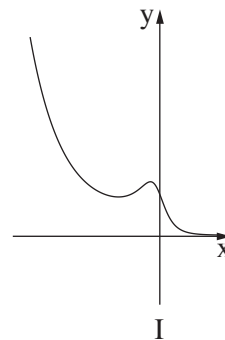
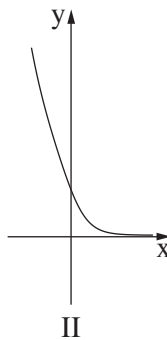
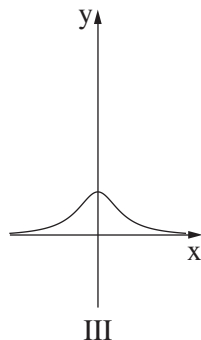
5. Soit la famille de fonctions $f(x) = \frac{e^{-mx}}{1+x^2}$. m est un paramètre.

Répondez aux articles א-ב pour $m \geq 0$.

- א. (1) Quel est le domaine de définition de la fonction $f(x)$?
 (2) Déterminez les intervalles sur lesquels la fonction $f(x)$ est positive et ceux sur lesquels elle est négative (s'il en existe). Justifiez.
 (3) On sait que toutes les fonctions $f(x)$ de cette famille se coupent en un seul point. Déterminez ses coordonnées.
- ב. (1) Pour $m \geq 0$, déterminez les valeurs de m pour lesquelles la dérivée $f'(x)$:
 (i) ne s'annule en aucun point.
 (ii) s'annule en un seul point exactement.
 (iii) s'annule en deux points exactement.
- (2) À la fin de cette question figurent trois graphes (I-III) de fonctions issues de la famille $f(x)$ pour $m \geq 0$.
 On sait que $m \neq 1$ et que chacun des ces graphes correspond à une valeur ou à un intervalle différent de valeurs de m .
 Faites correspondre à chacun des trois graphes, la valeur ou l'intervalle de valeurs de m qui lui convient. Justifiez.

Répondez à l'article ג. Vous pourrez vous aider du graphe qui convient parmi les graphes I-III.

ג. Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(-x)$ pour $0 < m < 1$.



Bonne chance!

Tous droits réservés à l'État d'Israël.
 Toute copie ou publication est interdite sans l'autorisation du
 Ministère de l'Éducation.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
 אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך