

סוג הבחינה: גמר לבתי-ספר לטכנאים ולהנדסאים

מועד הבחינה: אביב תשע"ט, 2019

סמל השאלון: 714003

נספחים: א. דף תשובות

ב. מילון מונחים

אלגברה ליניארית

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: ארבע שעות.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים.

פרק ראשון 64 נקודות

פרק שני 36 נקודות

סה"כ 100 נקודות

ג. חומר-עזר מותר לשימוש: 1. כל חומר עזר כתוב בכתב-יד או מודפס על נייר.

2. מחשבון פשוט שאינו ניתן לתכנות.

ד. הוראות מיוחדות:

1. את התשובות לכל השאלות יש לרשום אך ורק על גבי דף התשובות שבנספח א'.

2. לנוחותך, לשאלון זה מצורף מילון מונחים בשפות עברית, ערבית, אנגלית ורוסית. תוכל להיעזר בו בעת הצורך.

הוראות למשגיח:

בתום הבחינה יש לוודא שהנבחנים הדביקו את מדבקת הנבחן שלהם במקום המיועד לכך בדף התשובות שבנספח א' וצירפו אותו למחברת הבחינה.

בשאלון זה 20 עמודים ו-4 עמודי נספחים.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר, אך מכוונות הן לנבחנות והן לנבחנים.

בהצלחה!

השאלות

פרק ראשון (64 נקודות)

ענה על ארבע מבין השאלות 1-5 (לכל שאלה – 16 נקודות).

בכל אחת מן השאלות 1-5 נתונים חמישה סעיפים, א'-ה', שאינם תלויים זה בזה (לכל סעיף – 3.2 נק').
בכל סעיף נתונות ארבע תשובות, שרק אחת מהן נכונה. בכל סעיף בחר את התשובה הנכונה, והקף בעיגול את הספרה המייצגת אותה בדף התשובות שבנספח א'.
בשאלות שבחרת לענות עליהן, ענה על כל הסעיפים.
הדבק את מדבקת הנבחן שלך במקום המיועד לכך בדף התשובות, והדק אותו למחברת הבחינה.

הערה: טענה נחשבת כנכונה אם היא נכונה תמיד.

שאלה 1

הסעיפים א'-ג' מתייחסים לנתונים שלהלן:

נתונה מערכת המשוואות:

$$x + (1 - a)y + z = 1$$

$$3x - ay + 2z = 4$$

$$3x - ay + (a + 1)z = 4$$

א. בעבור אילו ערכים של a יש למערכת הנתונה פתרון יחיד?

1. בעבור כל ערך של a
2. בעבור כל a השונה מ-1 בלבד
3. בעבור כל a השונה מ-1 והשונה מ- $\frac{3}{2}$ בלבד
4. לא קיים ערך של a שבעבורו יש למערכת הנתונה פתרון יחיד

ב. בעבור כמה ערכים של a אין למערכת הנתונה אף פתרון?

1. לא קיים ערך של a שבעבורו אין למערכת הנתונה אף פתרון
2. קיימים אינסוף ערכים של a שבעבורם אין למערכת הנתונה אף פתרון
3. קיים ערך יחיד של a שבעבורו אין למערכת הנתונה אף פתרון
4. קיימים שני ערכים של a שבעבורם אין למערכת הנתונה אף פתרון

ג. בעבור $a = 0$, בחר בהיגד הנכון:

1. $z = 0$
2. קיימים אינסוף ערכי z אפשריים
3. למערכת הנתונה יש אינסוף פתרונות
4. למערכת הנתונה אין אף פתרון

הסעיפים ד'-ה' מתייחסים למערכת המשוואות ההומוגנית $Ax = 0$, שהיא מערכת משוואות בעלת שלוש משוואות ושלושה משתנים, ונתון כי הווקטור $(1,1,1)$ מהווה פתרון עבורה.

ד. קבע איזה מבין ההיגדים שלהלן אינו נכון:

1. למערכת הנתונה יש פתרון יחיד
2. הווקטור $(2,2,2)$ מהווה פתרון למערכת המשוואות הנתונה
3. קיימת מערכת משוואות אי-הומוגנית בעלת אותה מטריצת מקדמים A כמו זו של המערכת הנתונה, שאין לה פתרון
4. קיימת מערכת משוואות אי-הומוגנית בעלת אותה מטריצת מקדמים A כמו זו של המערכת הנתונה, שיש לה אינסוף פתרונות

ה. דרגת השורות של מטריצת המקדמים A תהיה:

1. קטנה או שווה ל-2
2. 2
3. 3
4. גדולה מ-3

שאלה 2

א. נתונות מטריצות ריבועיות A ו- B מסדר 3×3 .

בחר בהיגד הנכון מבין ההיגדים שלהלן:

1. אם $A^2 = 4I$ אז $A = 2I$ או $A = -2I$

2. אם $A^2 = A$ אז $A = I$

3. אם A הפיכה ו- $AB = 5I$ אז B הפיכה

4. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

ב. נתונה מטריצה הפיכה A .

בחר בהיגד הנכון מבין ההיגדים שלהלן:

1. A^4 הפיכה

2. $A(A + I)$ הפיכה

3. לכל מטריצה B מאותו סדר של A מתקיים $AB = BA$

4. קיים ערך של k כך ש- $A^k = I$

שתי ההגדרות שלהלן תקפות לסעיפים ג'-ה' שיופיעו בהמשך:

מטריצה A נקראת אנטי-סימטרית אם $A^T = -A$.

מטריצה A נקראת סימטרית אם $A^T = A$.

ג. נתונה מטריצה אנטי-סימטרית מסדר 3×3 : $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.
בחר בהיגד הנכון מבין ההיגדים שלהלן:

1. $a + e + i \neq 0$

2. $bc = dg$

3. $f = h$

4. $ab \neq 0$

ד. נתונה מטריצה ריבועית A .

איזו מבין המטריצות שלהלן היא **בהכרח** אנטי-סימטרית?

1. AA^T

2. $A + A^T$

3. $A - A^T$

4. $2AA^T$

ה. נתונות מטריצות סימטריות A ו- B .

בחר בהיגד הנכון לגבי המטריצה $A - B$:

1. המטריצה $A - B$ היא מטריצה סימטרית

2. המטריצה $A - B$ היא מטריצה אנטי-סימטרית

3. המטריצה $A - B$ אינה מטריצה סימטרית ואינה מטריצה אנטי-סימטרית

4. המטריצה $A - B$ שווה למטריצת האפס

שאלה 3

הסעיפים א'-ד' מתייחסים למטריצות A ו- B מסדר 3×3 .

כמו כן נתון כי $|A| = 3$, $|B| = 2$.

א. בחר בהיגד הנכון לגבי מערכת המשוואות $Ax = 0$:

1. למערכת המשוואות $Ax = 0$ אין פתרון

2. למערכת המשוואות $Ax = 0$ יש אינסוף פתרונות

3. למערכת המשוואות $Ax = 0$ קיים פתרון יחיד

4. אי-אפשר לדעת אם קיים פתרון למערכת המשוואות $Ax = 0$

ב. מהו הערך של $|2A^2 B^3|$?

0 .1

72 .2

576 .3

4. אי-אפשר לדעת מן הנתונים

ג. מהו הערך של $|3A^{-1} B^{-2}|$?

$\frac{1}{4}$.1

$\frac{9}{4}$.2

36 .3

4. אי-אפשר לדעת מן הנתונים

ד. מהו הערך של $|2A + B|$?

0 .1

8 .2

26 .3

4. אי-אפשר לדעת מן הנתונים

ה. נתון כי:
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$$

קבע איזה מבין ההיגדים שלהלן **אינו** נכון:

1.
$$\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix} = 4$$

2.
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix} = 4$$

3.
$$\begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$$

4.
$$\begin{vmatrix} -c & -b & -a \\ f & e & d \\ i & h & g \end{vmatrix} = 4$$

שאלה 4

הסעיפים א' ו-ב' מתייחסים לטרנספורמציה T כאשר הטרנספורמציה $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ מיוצגת על-ידי המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ כלומר לכל } v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \text{ מתקיים כי } T(v) = A \cdot v.$$

א. קבע איזה מההיגדים שלהלן **אינו** נכון:

1. T היא פונקצייה על

2. T היא פונקצייה חד-חד-ערכית

$$\begin{matrix} \text{3. } \text{Im} T = \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker} T \\ \text{4.} \end{matrix}$$

ב. מהו ערכו של $\dim \text{Ker} T$?

1. 0

2. 1

3. 2

4. 3

ג. נתונה טרנספורמציה לינארית $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$. נתון כי v_1, v_2 הם וקטורים עצמיים של T .

בחר בהיגד הנכון מבין ההיגדים שלהלן:

1. $v_1 + v_2$ הוא וקטור עצמי נוסף של T

2. $3v_1 + 2v_2$ הוא וקטור עצמי נוסף של T

3. $7v_1$ הוא וקטור עצמי נוסף של T

4. אם v_1 הוא וקטור עצמי של הערך העצמי 1, ו- v_2 הוא וקטור עצמי של הערך העצמי 2, אז $v_1 - v_2$ הוא וקטור עצמי של הערך העצמי -1

ד. נתונה טרנספורמציה ליניארית $T: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$, המיוצגת על-ידי המטריצה $A = \begin{pmatrix} a & e & 1 \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. כמו כן, נתון כי $abc = 0$.

קבע איזה מבין ההיגדים שלהלן **אינו** נכון:

1. אם נתון ש- $a = e = 1, b = 2, f = 5$ אז הווקטור $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של T .
2. אם $a \neq b$ וכן $b \neq 0$ וגם $a \neq 0$ אז יש להעתקה T שלושה ערכים עצמיים שונים.
3. T היא פונקצייה חד-חד-ערכית.
4. אם נתון ש- $a = e = 1, b = 2, f = 5$ אז סכום הערכים העצמיים הוא 3.

ה. נתונה טרנספורמציה ליניארית $T: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$.

קבע איזו מבין הטענות שלהלן בהכרח **אינה** מתקיימת:

1. $\dim \text{Im} T = \dim \text{Ker} T$
2. $\dim \text{Ker} T > \dim \text{Im} T$
3. $\dim \text{Im} T > \dim \text{Ker} T$
4. $\dim \text{Im} T = 0$

שאלה 5

ההגדרה שלהלן מתייחסת לסעיפים א'-ב':

תהי $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ קבוצת וקטורים המהווה בסיס למרחב $\mathbf{R}^4$.

א. קבע איזה מבין ההיגדים שלהלן **אינו** נכון:

1. הקבוצה $\{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, v_1 + v_2 + v_3 - v_4\}$ פורשת את המרחב $\mathbf{R}^4$.
2. הקבוצה $\{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, v_1 + v_2 + v_3 - v_4\}$ היא בלתי תלויה ליניארית.
3. הקבוצה $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_1 + v_2 + v_3 - v_4\}$ פורשת את המרחב $\mathbf{R}^4$.
4. הקבוצה $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_1 + v_2 + v_3 - v_4\}$ מהווה בסיס למרחב $\mathbf{R}^4$.

ב. נגדיר: $U = \text{Sp}\{v_1, v_2, v_3\}$, $W = \text{Sp}\{v_3, v_4\}$, $V = \text{Sp}\{v_1, v_2\}$

בחר בהיגד הנכון מבין ההיגדים שלהלן:

1. הקבוצה $U \cap W$ היא תת־מרחב של $\mathbb{R}^4$

2. הקבוצה $U \cup W$ היא תת־מרחב של $\mathbb{R}^4$

3. גודל הקבוצה $U \cap W$ הוא 1

4. גודל הקבוצה $V \cap W$ הוא 0

הערה: הסעיפים ג'-ה' שלהלן אינם תלויים זה בזה.

ג. יהיו $v_1 = (2, 6, 1, 3)$, $v_2 = (0, 2, 1, 1)$, $v_3 = (1, 2, 0, 1)$ וקטורים במרחב $\mathbb{R}^4$.

מהו מימד תת־המרחב הנפרש על־ידי הווקטורים v_1, v_2, v_3 ?

1. 1

2. 2

3. 3

4. 4

ד. תהי $A = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ קבוצת וקטורים שפורשת את המרחב $\mathbb{R}^4$.

קבע איזה מבין ההיגדים שלהלן **אינו** נכון:

1. כל תת־קבוצה של A היא בלתי תלויה לינארית

2. הקבוצה A מהווה בסיס למרחב $\mathbb{R}^4$

3. כל תת־קבוצה של A פורשת את המרחב $\mathbb{R}^4$

4. מימד תת־המרחב הנפרש על־ידי הקבוצה $\{v_1, v_2, v_1 - v_2\}$ הוא 2

ה. נתון כי $A = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ היא קבוצת וקטורים שפורשת את המרחב $\mathbb{R}^4$.

כמו כן, נתון כי v_5 הוא וקטור במרחב $\mathbb{R}^4$ שהוא צירוף ליניארי של הווקטורים v_1, v_2, v_3 .

B היא מטריצה ששורותיה הן: v_1, v_2, v_3, v_5 .

מהי דרגת השורות של המטריצה B ?

1. 1

2. 2

3. 3

4. 4

פרק שני (36 נקודות)

ענה על שתיים מבין השאלות 6-8 (לכל שאלה – 18 נקודות).

בכל אחת מן השאלות 6-8 נתונים שבעה סעיפים. בכל סעיף נתונות ארבע תשובות, שרק אחת מהן נכונה. בכל סעיף בחר את התשובה הנכונה, והקף בעיגול את הספרה המייצגת אותה בדף התשובות שבנספח א'. בשאלות שבחרת לענות עליהן, ענה על כל הסעיפים.

שאלה 6 (18 נקודות)

בשאלה זו שבעה סעיפים, א'-ז'. ענה על כל הסעיפים.

נתונה פונקציית המטרה $\max\{Z = -x_1 + ax_2\}$, בכפוף לאילוצים האלה:

$$1) -x_1 - x_2 \leq 1$$

$$2) -x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

2.5 נק' א. עבור $a = 2$, קבע איזה מבין ההיגדים שלהלן הוא ההיגד הנכון:

1. לבעיה הפרימלית הנתונה אין תחום אפשרי
2. לבעיה הפרימלית הנתונה יש פתרון שאינו חסום
3. לבעיה הפרימלית הנתונה יש אינסוף פתרונות אופטימליים
4. לבעיה הפרימלית הנתונה יש פתרון אופטימלי יחיד

2.5 נק' ב. עבור $a = 2$, מוסיפים לבעיה הנתונה את האילוץ $x_1 + x_2 \leq 3$.

קבע איזה מבין ההיגדים שלהלן הוא ההיגד הנכון:

1. לבעיה הפרימלית הנתונה אין פתרון אופטימלי
2. לבעיה הפרימלית הנתונה יש פתרון שאינו חסום
3. לבעיה הפרימלית הנתונה יש אינסוף פתרונות אופטימליים
4. לבעיה הפרימלית הנתונה יש פתרון אופטימלי יחיד

ג. (2.5 נק') חוזרים לבעיה הפרימלית המקורית.

עבור $a = 1$, קבע איזה מבין ההיגדים שלהלן הוא ההיגד הנכון:

1. לבעיה הפרימלית הנתונה אין פתרון אופטימלי
2. לבעיה הפרימלית הנתונה יש פתרון שאינו חסום
3. לבעיה הפרימלית הנתונה יש אינסוף פתרונות אופטימליים
4. לבעיה הפרימלית הנתונה יש פתרון אופטימלי יחיד

ד. (2.5 נק') עבור $a = 1$, מוסיפים לבעיה הנתונה את האילוץ $x_1 + x_2 \leq 3$.

איזה מבין ההיגדים שלהלן הוא ההיגד הנכון:

1. לבעיה הפרימלית הנתונה אין פתרון אופטימלי
2. לבעיה הפרימלית הנתונה יש פתרון שאינו חסום
3. לבעיה הפרימלית הנתונה יש אינסוף פתרונות אופטימליים
4. לבעיה הפרימלית הנתונה יש פתרון אופטימלי יחיד

ה. (3 נק') קבע איזה מבין ההיגדים שלהלן נכון עבור הבעיה הפרימלית הנתונה:

1. אם ישתנה כיוון האי־שוויון באילוץ 1, אז בהכרח לבעיה הפרימלית הנתונה לא יהיה פתרון אופטימלי
2. אם ישתנה כיוון האי־שוויון באילוץ 1, אז קיים a שעבורו לבעיה הפרימלית הנתונה יהיה פתרון אופטימלי
3. אם ישתנה כיוון האי־שוויון באילוץ 2, אז בהכרח לבעיה הפרימלית הנתונה לא יהיה תחום אפשרי
4. אם ישתנה כיוון האי־שוויון באילוץ 2, אז קיים a שעבורו לבעיה הפרימלית הנתונה יהיו בדיוק שני פתרונות אופטימליים

2.5 נק') 1. מהי הבעיה הדואלית המתאימה לבעיה הפרימלית הנתונה:

$$1. \min \{Z = y_1 + y_2\}$$

$$\text{s.t. } 1) y_1 + y_2 \geq 1$$

$$2) -y_1 + y_2 \geq a$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

$$2. \min \{Z = y_1 + y_2\}$$

$$\text{s.t. } 1) y_1 + y_2 \leq 1$$

$$2) -y_1 + y_2 \leq a$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

$$3. \min \{Z = y_1 + y_2\}$$

$$\text{s.t. } 1) y_1 + y_2 \geq -1$$

$$2) -y_1 + y_2 \geq a$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

$$4. \min \{Z = y_1 + y_2\}$$

$$\text{s.t. } 1) y_1 + y_2 \leq 1$$

$$2) -y_1 + y_2 \geq a$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

2.5 נק') 2. קבע איזה מבין ההיגדים שלהלן הוא ההיגד הנכון:

1. אם לבעיה פרימלית יש פתרון שאינו חסום, אזי לבעיה הדואלית המתאימה לה יש בהכרח פתרון אופטימלי

2. אם לבעיה פרימלית יש פתרון שאינו חסום, אזי לבעיה הדואלית המתאימה לה אין פתרון אופטימלי

3. אם לבעיה פרימלית אין פתרון אופטימלי, אזי לבעיה הדואלית המתאימה לה יש בהכרח פתרון שאינו חסום

4. אם לבעיה פרימלית אין פתרון אופטימלי, אזי בהכרח לבעיה הדואלית המתאימה לה אין תחום אפשרי

שאלה 7 (18 נקודות)

בשאלה זו **שבעה** סעיפים, א'-ז'. ענה על **כל** הסעיפים.

(2.5 נק') **א.** בטבלה שלפניך מוצגים נתוני ההיצע, הביקוש, המקורות והיעדים עבור בעיית תובלה כלשהי:

מקורות	יעדים					היצע
	1	2	3	4	5	
1						30
2						50
3						120
4						30
ביקוש	20	80	30	60	40	

מהו פתרון בסיסי אפשרי לבעיית התובלה הנתונה שמתקבל בשיטת "הפינה הצפון-מערבית"?

1. $x_{11} = 30, x_{12} = 10, x_{22} = 50, x_{32} = 20, x_{33} = 20, x_{34} = 60, x_{35} = 10, x_{45} = 30$

2. $x_{11} = 20, x_{12} = 10, x_{22} = 50, x_{32} = 20, x_{33} = 30, x_{34} = 60, x_{35} = 10, x_{45} = 30$

3. $x_{11} = 20, x_{12} = 10, x_{22} = 50, x_{32} = 20, x_{33} = 30, x_{34} = 60, x_{44} = 10, x_{45} = 30$

4. $x_{11} = 30, x_{12} = 10, x_{22} = 50, x_{32} = 20, x_{33} = 20, x_{34} = 60, x_{44} = 10, x_{45} = 30$

(2.5 נק') **ב.** בטבלה שלפניך נתון פתרון אופטימלי לבעיית תובלה כלשהי:

מקורות	יעדים			היצע	u
	1	2	3		
1	12	10	2	50	0
		(30)	(20)		
2	α	β	10	60	8
			(60)		
3	5	10	18	200	0
	(100)	(100)			
ביקוש	100	130	80		
v	5	10	2		

עבור אילו מן הערכים של α ו- β הנתונים להלן הפתרון הנתון יישאר אופטימלי?

1. $\alpha = 13$, $\beta = 13$

2. $\alpha = 13$, $\beta = 18$

3. $\alpha = 10$, $\beta = 18$

4. $\alpha = 18$, $\beta = 10$

ג. (2.5 נק') להלן פתרון אפשרי לבעיית התובלה:

מקורות	יעדים				היצע	u
	1	2	3	4		
1	2	8	5	7	30	u_1
				(30)		
2	4	10	8	3	60	u_2
			(20)	(40)		
3	5	3	7	1	70	u_3
	(20)	(25)	(25)			
ביקוש	20	25	45	70		
v	v_1	v_2	v_3	v_4		

קבע אילו ערכים של u ושל v מתאימים לפתרון הנתון.

1. $u_1 = 6$ $u_2 = 2$ $u_3 = 1$ $v_1 = 4$ $v_2 = 2$ $v_3 = 6$ $v_4 = 1$

2. $u_1 = 0$ $u_2 = -4$ $u_3 = -5$ $v_1 = 5$ $v_2 = 8$ $v_3 = 12$ $v_4 = 7$

3. $u_1 = 0$ $u_2 = 4$ $u_3 = 8$ $v_1 = 5$ $v_2 = 8$ $v_3 = 12$ $v_4 = 7$

4. לא ניתן למצוא ערכי u ו- v המתאימים לפתרון

(2.5 נק') ד. בטבלה שלפניך נתונים ערכים של u ושל v שחושבו עבור פתרון בסיסי אפשרי לבעיית תובלה כלשהי:

מקורות	יעדים				היצע	u
	1	2	3	4		
1	2	8	5	6	70	0
2	4	10	8	2	85	2
3	5	3	7	1	15	3
ביקוש	88	25	50	7		
v	2	8	6	0		

איזה פתרון בסיסי אפשרי מתאים לנתוני הטבלה הזו?

1. $x_{11} = 70 \quad x_{21} = 3 \quad x_{22} = 25 \quad x_{23} = 50 \quad x_{24} = 7 \quad x_{31} = 15$

2. $x_{11} = 45 \quad x_{12} = 25 \quad x_{21} = 28 \quad x_{24} = 7 \quad x_{31} = 15 \quad x_{32} = 50$

3. $x_{11} = 70 \quad x_{22} = 25 \quad x_{23} = 50 \quad x_{24} = 7 \quad x_{31} = 18$

4. $x_{12} = 20 \quad x_{13} = 50 \quad x_{21} = 85 \quad x_{32} = 8 \quad x_{34} = 7$

(2.5 נק') ה. קבוצת "אתלטיקה קלה" מונה חמישה ספורטאים: אבי, בני, שי, דוד והראל.

לקראת מירוץ שליחים הכולל חמישה שלבים, מאמן הקבוצה מעוניין לשבץ נציג אחד מן הספורטאים בכל אחד מן השלבים באופן המיטבי, כך שהזמן הכולל עבור ביצועיה של הקבוצה יהיה מינימלי.

בטבלה שלהלן נתונים משכי הביצוע המיטביים (בדקות) לכל ספורטאי עבור כל אחד משלבי המירוץ.

שם	שלב				
	שלב א	שלב ב	שלב ג	שלב ד	שלב ה
אבי	11	11	11	13	10
בני	11	13	13	12	13
שי	13	15	19	13	11
דוד	16	17	13	19	15
הראל	18	12	16	16	19

קבע איזה מבין ההיגדים שלהלן הוא ההיגד הנכון:

1. קיים פתרון אופטימלי יחיד שבו הזמן הכולל הוא 58 דקות
2. קיים פתרון אופטימלי יחיד שבו הזמן הכולל הוא 59 דקות
3. קיימים שני פתרונות אופטימליים שבהם הזמן הכולל הוא 58 דקות
4. קיימים שני פתרונות אופטימליים שבהם הזמן הכולל הוא 59

2.5 נק') ו.

בכיתה ישנם חמישה תלמידים המצטיינים במגוון מקצועות: אלכס, שי, גל, דינה והדס.

המורה צריך לשבץ את התלמידים בחמש אולימפיאדות במקצועות: מתמטיקה, פיזיקה, כימיה, ביולוגיה ומחשבים.

בטבלה שלהלן נתונים ציוני התלמידים בכל המקצועות האלה:

תלמיד	מקצוע				
	מחשבים	ביולוגיה	כימיה	פיזיקה	מתמטיקה
אלכס	97	99	94	94	98
שי	93	92	93	91	91
גל	94	94	99	95	93
דינה	95	99	93	96	96
הדס	99	96	96	92	98

המורה מעוניין לשבץ את התלמידים באולימפיאדות כך שכל תלמיד ישתתף רק באולימפיאדה אחת, ושהסכום הכולל של ציוני התלמידים במקצועות המתאימים יהיה מרבי.

קבע איזה מבין ההיגדים שלהלן הוא ההיגד הנכון:

1. בפתרון האופטימלי לבעיה הנתונה אלכס ישובץ באולימפיאדה לכימיה.
2. בפתרון האופטימלי לבעיה הנתונה שי ישובץ באולימפיאדה לפיזיקה.
3. בפתרון האופטימלי לבעיה הנתונה דינה תשובץ באולימפיאדה לכימיה.
4. בפתרון האופטימלי לבעיה הנתונה הדס תשובץ באולימפיאדה לפיזיקה.

(3 נק') ז. בהמשך לסעיף הקודם – איזה שינוי נדרש לעשות בנתוני הבעיה המקורית כדי שיתקבלו שני פתרונות אופטימליים?

1. יש להעלות בנקודה אחת את הציון של דינה במחשבים
2. יש להעלות בנקודה אחת את הציון של דינה בכימיה
3. יש להעלות בנקודה אחת את הציון של דינה בפיזיקה
4. יש להעלות בנקודה אחת את הציון של דינה במתמטיקה

שאלה 8 (18 נקודות)

בשאלה זו שבעה סעיפים, א'-ז'. ענה על כל הסעיפים.

$$\begin{aligned} \max \{ Z = 80x_1 + 58x_2 + 60x_3 \} \\ \text{s.t. } 1) 4x_1 + 43x_2 + 45x_3 \leq 250 \\ 2) 6x_1 + 50x_2 + 52x_3 \leq 500 \\ 3) 2x_1 + x_2 \leq 80 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

להלן בעייה פרימלית של תכנון ליניארי:

המשתנים x_4, x_5, x_6 הם משתני סרק עבור האילוצים 1, 2, ו-3 בהתאמה.

לאחר ביצוע מספר איטרציות של אלגוריתם הסימפלקס, מתקבלת הטבלה הסופית שלהלן:

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
Z	1	n	36.667	m	1.333	0	37.333	k
x_3	0	0	0.911	g	0.024	0	-0.05	p
x_5	0	0	-0.378	0	-1.158	h	-0.681	156
x_1	0	f	0.5	0	0	0	0.5	q

(3 נק') א. מהו ערכו של k ?

1. 3020
2. 3120
3. 3220
4. 3320

(2.5 נק') ב. מהו ערכם של p ו- q בפתרון האופטימלי הפרימלי ?

1. $p = 1, q = 20$

2. $p = 1, q = 40$

3. $p = 2, q = 20$

4. $p = 2, q = 40$

(2.5 נק') ג. מהו ערכם של n ו- m בפתרון האופטימלי הפרימלי?

1. $n = 0, m = 0$

2. $n = 0, m = 1$

3. $n = 1, m = 0$

4. $n = 1, m = 1$

(2.5 נק') ד. מהו ערכם של h, g ו- f בפתרון האופטימלי הפרימלי?

1. $f = 0, h = 0, g = 1$

2. $f = 0, h = 1, g = 0$

3. $f = 0, h = 1, g = 1$

4. $f = 1, h = 1, g = 1$

(2.5 נק') ה. מוסיפים לבעיה הפרימלית המקורית את האילוץ $x_2 \leq 100$.

בחר בהיגד הנכון מבין ההיגדים שלהלן:

1. הפתרון האופטימלי שבטבלה הנתונה לא יהיה אופטימלי עוד, אך יישאר אפשרי

2. הפתרון האופטימלי שבטבלה הנתונה ימשיך להיות אופטימלי

3. הפתרון האופטימלי שבטבלה הנתונה יהפוך לפתרון לא אפשרי

4. לא ניתן לפתור את הבעיה ללא הפעלה מחדש של אלגוריתם סימפלקס

2.5 נק') ו. מה יהיה הפתרון האופטימלי הדואלי, כאשר y_i הוא המשתנה הדואלי המתאים לאילוץ הפרימלי i , עבור $i = 1, 2, 3$?

1. $y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 0.5$

2. $y_1 = 1.333, y_2 = 0, y_3 = 37.333$

3. $y_1 = 0.024, y_2 = 0, y_3 = -0.05$

4. $y_1 = -1.158, y_2 = 1, y_3 = -0.681$

2.5 נק') ז. נתונה טבלת סימפלקס סופית של בעיית תכנון ליניארי, ונתון כי כל המשתנים הבסיסיים חיוביים.

מהי משמעותו של משתנה לא בסיסי עם מקדם שערכו 0 בשורת האפס (שורת ה- Z)?

1. לבעיה הפרימלית יש אינסוף פתרונות אופטימליים

2. לבעיה הפרימלית יש פתרון שאינו חסום

3. לבעיה הפרימלית אין פתרון

4. לבעיה הפרימלית יש פתרון יחיד

בהצלחה!

הדבק את מדבקת הנבחן שלך במקום המיועד לכך, והדק את הדף הזה למחברת הבחינה שלך.

הקף בעיגול את הספרה המייצגת את התשובה הנכונה לכל סעיף.

שאלה 1					שאלה 2					שאלה 3					שאלה 4				
סעיף א	1	2	3	4	סעיף א	1	2	3	4	סעיף א	1	2	3	4	סעיף א	1	2	3	4
סעיף ב	1	2	3	4	סעיף ב	1	2	3	4	סעיף ב	1	2	3	4	סעיף ב	1	2	3	4
סעיף ג	1	2	3	4	סעיף ג	1	2	3	4	סעיף ג	1	2	3	4	סעיף ג	1	2	3	4
סעיף ד	1	2	3	4	סעיף ד	1	2	3	4	סעיף ד	1	2	3	4	סעיף ד	1	2	3	4
סעיף ה	1	2	3	4	סעיף ה	1	2	3	4	סעיף ה	1	2	3	4	סעיף ה	1	2	3	4
שאלה 5					שאלה 6					שאלה 7					שאלה 8				
סעיף א	1	2	3	4	סעיף א	1	2	3	4	סעיף א	1	2	3	4	סעיף א	1	2	3	4
סעיף ב	1	2	3	4	סעיף ב	1	2	3	4	סעיף ב	1	2	3	4	סעיף ב	1	2	3	4
סעיף ג	1	2	3	4	סעיף ג	1	2	3	4	סעיף ג	1	2	3	4	סעיף ג	1	2	3	4
סעיף ד	1	2	3	4	סעיף ד	1	2	3	4	סעיף ד	1	2	3	4	סעיף ד	1	2	3	4
סעיף ה	1	2	3	4	סעיף ה	1	2	3	4	סעיף ה	1	2	3	4	סעיף ה	1	2	3	4
סעיף ו	1	2	3	4	סעיף ו	1	2	3	4	סעיף ו	1	2	3	4	סעיף ו	1	2	3	4
סעיף ז	1	2	3	4	סעיף ז	1	2	3	4	סעיף ז	1	2	3	4	סעיף ז	1	2	3	4

נספח ב': מילון מונחים (3 עמודים)

לשאלון 714003, אביב תשע"ט

תרגום המונח			המונח
אנגלית	רוסית	ערבית	
חלק א' - אלגברה לינארית			
infinite number of solutions	бесконечное число решений	عدد غير نهائي من الحلول	אינסוף פתרונות
base	основание, базис	أساس	בסיס
dual	Двойственность	مُزدَوِّج	דואלי
determinant	Определитель, детерминант	المُحدِّدات	דטרמיננטה
rank	Степень, ранг	درجة	דרגה
vector	Вектор	مُتَّجِه	וקטור
one-one correspondence	Инъекция, одно-однозначное отображение	ذات قيمة واحدة	חד-חד ערכי
transformation	отображение	تحوّل	טרנספורמציה
matrix	матрица	مصفوفة	מטריצה
inverse matrix	обратная матрица	مصفوفة معكوسة	מטריצה הופכית
invertible matrix	Невырожденная матрица	مصفوفة يمكن عكسها	מטריצה הפיכה
dimension	Размерность	بُعد	מימד
system of equations	Система уравнений	هيئة مُعادلات	מערכת משוואות
homogeneous system of equations	однородная система уравнений	هيئة مُعادلات متجانسة	מערכת משוואות הומוגנית
coefficients	коэффициенты	مُعامِلات	מקדמים
space	пространство	بُعد	מרחב
slack variable	дополнительная переменная	مُتغيّر خامل	משתנה סרק

נספח ב': מילון מונחים
סמל 714003, אביב תשע"ט

המונח	תרגום המונח		
	ערבית	רוסית	אנגלית
סקלר	عدديّ	скаляр	scalar
על	عُلَيّا	Сюръекция	onto
ערך עצמי	قيمة ذاتيّة	собственное число	eigenvalue
חלק ב' - תכנון לינארי			
אילוץ	إجبار	ограничение, неравенство	constraint
ביקוש	الطلب	спрос	demand
בעיית תובלה	مشكلة النقل	Транспортная задача	transportation problem
בעיה פרימלית	مشكلة بدائيّة	Прямая задача	primal problem
היצע	العرض	Предложение	supply
טבלת סימפלקס	جدول بسيط	симплекс-таблица	simplex tableau
יעד דמה	هدف وهمي	"свалка" — дополнительный пункт, куда свозят все лишнее производство	dummy target
לא מוגבל בסימן	مُتغيّر حرّ (متغيّر غير مُرمّز)	неограниченный по знаку	free variable
מקור דמה	مصدر وهمي	дополнительный (искусственный) производитель	dummy source
משתנה בסיסי	مُتغيّر أساسي	базисная переменная	basic variable
עלות	تكلفة	стоимость	cost
פונקציית מטרה	وظيفة هادفة	целевая функция	objective function
פרמטר	بارامتر	Параметр	parameter
פתרון אופטימלי	الحل الأمثل	оптимальное решение	optimal solution

נספח ב': מילון מונחים
סמל 714003, אביב תשע"ט

המונח	תרגום המונח		
	ערבית	רוסית	אנגלית
פתרון חסום	حلّ مسدود	ограниченное решение	bounded solution
פתרון יחיד	حلّ وحيد	единственное решение	unique solution
קודקוד	رأس	вершина	vertex
קומבינציה ליניארית	مزيج خطّي	линейная комбинация	linear combination
שיטת הפינה הצפון-מערבית	طريقة الركن الشمالي الغربي	Метод северо-западного угла	northwestern corner method
תחום הפתרונות האפשריים	مجال الحلول الممكنة	область допустимых решений	feasible solutions set
תכנון ליניארי	البرمجة الخطيّة	Линейное программирование	linear programming
תלות ליניארית	الاعتماد الخطّي	линейная зависимость	linear dependence