

Matemáticas

5 unidades de estudio – Segundo cuestionario

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון שני

Instrucciones para el examen

הוראות לנבחן

א. Duración del examen: Dos horas y cuarto.

א. משך הבחינה: שתיים ורבע.

ב. Estructura del cuestionario y clave de la evaluación:

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

Este cuestionario consta de dos partes.

בשאלון זה שני פרקים.

Primera parte – Geometría analítica, vectores, trigonometría del espacio, números complejos

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים

$$2 \times 33 \frac{1}{3} - 66 \frac{2}{3} \text{ puntos}$$

$$66 \frac{2}{3} - 33 \frac{1}{3} \times 2 \text{ נקודות}$$

Segunda parte – Crecimiento y decrecimiento, funciones potencia funciones exponenciales y logarítmicas

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

$$1 \times 33 \frac{1}{3} - 33 \frac{1}{3} \text{ puntos}$$

$$33 \frac{1}{3} - 33 \frac{1}{3} \times 1 \text{ נקודות}$$

$$\text{Total} - 100 \text{ puntos}$$

$$\text{סה"כ} - 100 \text{ נקודות}$$

ג. Material auxiliar permitido:

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) Una calculadora no gráfica. No se admite la posibilidad de programación con calculadoras programables. El uso de calculadora gráfica o de la posibilidad de programación de las calculadoras programables puede causar la anulación del examen.
- (2) Hojas de fórmulas (adjuntas).
- (3) Diccionario hebreo-lengua extranjera / lengua extranjera-hebreo.

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).
- (3) מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. Instrucciones especiales:

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) No copies la pregunta; indica sólo su número.
- (2) Inicia cada respuesta a una nueva pregunta en una nueva hoja. Indica en el cuadernillo las etapas de la resolución, aun en el caso en que realices tus cálculos utilizando la calculadora. Explica detalladamente y de forma clara y ordenada, todas tus operaciones, incluidos los cálculos. La falta de detalles puede perjudicar la nota o causar la anulación del examen.
- (3) Como borrador puedes usar las hojas del cuadernillo del examen. El uso de otros borradores puede causar la anulación del examen.

- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
- (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
- (3) לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה. שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

¡Buena Suerte!

בהצלחה!

Preguntas

¡Presta atención! Explica detalladamente y de forma clara y ordenada, todas tus operaciones, incluidos los cálculos. La falta de detalles puede perjudicar la nota o causar la anulación del examen.

Primera parte — Geometría analítica, vectores, trigonometría del espacio, números complejos ($66\frac{2}{3}$ puntos)

Responde a dos de las preguntas 1 – 3 (cada pregunta $33\frac{1}{3}$ puntos).

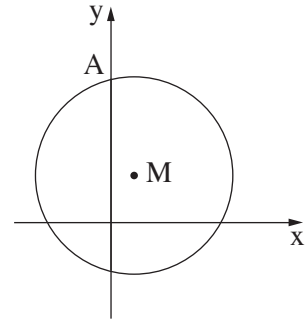
¡Presta atención! Si respondes a más de dos preguntas, solo las dos primeras respuestas de tu cuadernillo serán tenidas en cuenta para la corrección.

1. Una circunferencia de centro M corta la parte positiva del eje y en el punto A , como se muestra en el dibujo.

Desde el centro de la circunferencia se trazó una perpendicular al eje y , que corta al eje en el punto E .

Se sabe que $AE = 6$.

Se sabe también que la distancia al punto M desde el origen de coordenadas es la mitad de la longitud del radio de la circunferencia.



- ⌘. Demuestra que el lugar geométrico de todos los puntos M que cumplen con los datos de la pregunta se halla sobre una elipse, y encuentra su ecuación.

Indicaremos con F_1 y con F_2 los focos de la elipse cuya ecuación hallaste en el apartado ⌘.

Los puntos D_1 y D_2 son puntos sobre la elipse.

La coordenada y de D_1 es positiva y la coordenada y de D_2 es negativa.

- ⌘. (1) Halla el área máxima posible para el cuadrilátero $F_1D_1F_2D_2$. Justifica tu respuesta.
(2) ¿Existe un cuadrilátero $F_1D_1F_2D_2$ de perímetro máximo? Justifica tu respuesta.

2. Se da la pirámide OBCDE cuya base OBCD es un cuadrado.

La arista OE es perpendicular al plano de la base.

Se sabe que: $OD = 4$, $OE = 12$.

Se colocó la pirámide en un sistema de ejes de modo que el punto O es el origen de coordenadas y los puntos D , B , E se hallan sobre los ejes x , y , z respectivamente (como se describe en el dibujo).

- א. Halla la representación paramétrica de la recta EC .

El punto N se halla sobre la arista EC . Desde el punto N se baja una perpendicular a la base de la pirámide que la corta en el punto F .

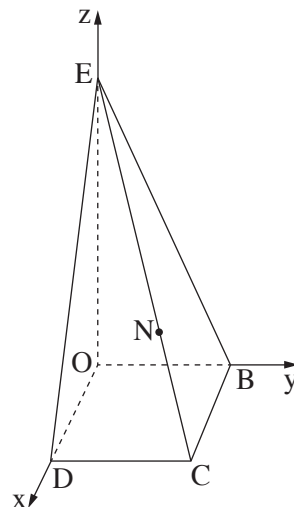
La distancia al punto F desde el eje y es 3 .

- ב. Halla las coordenadas del punto N .

- ג. Halla la magnitud del ángulo entre el plano BCN y la base de la pirámide OBCD .

K es un punto sobre la arista EC tal que KOBCD es una pirámide recta (OBCD es la base de la pirámide).

- ד. Halla la representación paramétrica de la recta sobre la cual se halla la altura a la base desde el punto K .



3. א. Halla todas las soluciones de la ecuación $z^3 = \bar{z}$, $z \neq 0$. z es un número complejo.

- ב. (1) Halla la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos del plano de Gauss que cumplen $z^2 \cdot (\bar{z})^2 = 1$.

- (2) Muestra que todas las soluciones de la ecuación del apartado א se hallan sobre el lugar geométrico que hallaste en el subapartado ב(1) .

- ג. (1) Los puntos que corresponden a las soluciones de la ecuación que encontraste en el apartado א fueron rotados en un ángulo de 45° (en sentido antihorario). Se da que cada uno de los puntos que se obtienen después de la rotación corresponde a un número que cumple con la ecuación $z^4 = a$.

Halla a .

- (2) Los puntos que corresponden a las soluciones de la ecuación que hallaste en el apartado א fueron rotados en un ángulo α (en sentido antihorario).

Demuestra que la suma de los números que corresponden a los puntos que se obtienen después de la rotación es igual a 0 .

Segunda parte — Crecimiento y decrecimiento, funciones potencia, funciones exponenciales y logarítmicas ($33\frac{1}{3}$ puntos)

Responde a una de las preguntas 4 – 5.

¡Presta atención! Si respondes a más de una pregunta, sólo la primera respuesta de tu cuadernillo será tomada en cuenta para la corrección.

4. Se da la función $f(x) = \frac{e^{ax} - e^x}{e^{ax} - 3e^x + 2}$, a es un parámetro.

La función tiene una asíntota vertical $x = \ln 2$.

א. Halla a .

Sustituye el valor de a hallado, y responde a los apartados ב-ה.

- ב. Halla el dominio de definición de la función $f(x)$ y muestra que para todo $x \neq 0$ en el dominio se cumple: $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 2}$.
- ג. (1) Halla las ecuaciones de las asíntotas de la función $f(x)$ que son perpendiculares a los ejes.
- (2) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x)$ (si los hubiere).
- (3) Traza un esbozo del gráfico de la función $f(x)$.

Se define una función $h(x) = \left| \frac{e^x}{e^x - 2} - \frac{1}{2} \right|$.

- ד. (1) Escribe las ecuaciones de las asíntotas de la función $h(x)$ que son perpendiculares a los ejes.
- (2) Traza un esbozo del gráfico de la función $h(x)$.
- (3) Calcula el área delimitada por el gráfico de la función $h(x)$, por el eje x , por la recta $x = \ln 8$ y por la recta $x = \ln 16$.

Dato: la función $h(x)$ es simétrica con respecto a la recta $x = \ln 2$.

Los puntos A y B se hallan sobre el gráfico de la función $h(x)$, y son simétricos respecto a la recta $x = \ln 2$.

La coordenada x del punto A es $\ln 8$.

ה. Halla las coordenadas del punto B .

5. $f(x)$ es una función derivable para todo x en su dominio de definición.
- א. Muestra que la función $f(x)$ y la función $e^{f(x)}$ tienen puntos de extremo en las mismas coordenadas x , y que dichos puntos de extremo son del mismo tipo (mínimos o máximos).

Se da $f(x) = x \ln(x^n)$. n es un parámetro natural.

- ב. Halla el dominio de definición de la función $f(x)$. Refiérete a diversos valores de n .
- ג. Halla las coordenadas de los puntos de intersección del gráfico de la función $f(x)$ con el eje x . Refiérete a diversos valores de n .

Dato: El gráfico de la función $f(x)$ corta al eje x en dos puntos.

- ד. (1) Muestra que la función $f(x)$ es impar.
- (2) Halla las coordenadas de los puntos de extremo de la función $f(x)$, y determina su tipo (si fuera necesario exprésalas por medio de n).
- (3) Traza un esbozo del gráfico de la función $f(x)$ para $n = 2$.
- ה. Valiéndote de tu respuesta al apartado א, halla las coordenadas de los puntos de extremo de la función $e^{x \ln(x^n)}$ (n natural), y determina su tipo (si fuera necesario exprésalas por medio de n).

¡Buena Suerte!

Los derechos de autor están reservados al Estado de Israel.
Se prohíbe su copia o publicación salvo la autorización expresa
del Ministerio de Educación.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך