

מ ת מ ט י ק ה
5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

מатематика
5 единиц обучения – первый вопросник

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות

— 20×2 — 40 נקודות

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור

— 20×1 — 20 נקודות

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

— 20×2 — 40 נקודות

סה"כ — 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

2. דפי נוסחאות (מצורפים).

3. מילון לפי בחירת הנבחן.

ד. הוראות מיוחדות:

1. אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

2. התחל כל שאלה בעמוד חדש.

רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

3. לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה. שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

Вопросы

Обратите внимание! Объясняйте все ваши действия, включая вычисления, подробным и ясным образом.

Недостаточная детализация может снизить вашу оценку или привести к аннулированию экзамена.

Раздел первый – алгебра и теория вероятности

(40 баллов)

Ответьте на два из вопросов 1-3 (за каждый вопрос – 20 баллов).

Обратите внимание! Если вы ответите более чем на два вопроса, будут проверены только первые два из ответов в вашей тетради.

1. Бригада опытных рабочих-лесорубов планировала заготовить 216 кубометров древесины в течение определенного количества дней (производительность труда рабочих постоянна). В первые три дня рабочие трудились в соответствии с запланированной [תוכנית] производительностью. Начиная с четвертого дня они увеличили скорость своей работы и каждый день заготавливали на 8 кубометров древесины больше, чем планировали. Фактически они проработали на один день меньше запланированного количества дней и заготовили в общей сложности 232 кубометра древесины.
- (*) (1) Сколько кубометров древесины в день должны были заготовить рабочие по плану?
(2) Сколько дней трудились рабочие фактически?
- (*) В какой из дней с начала работ лесорубы заготовили $\frac{2}{3}$ от запланированного количества?

После этого к каждому опытному рабочему был приставлен рабочий-ученик, так что образовалась новая бригада из $2m$ рабочих в общей сложности (m опытных и m учеников).

Производительность труда опытных рабочих является запланированной [תוכנית] производительностью. Все опытные рабочие трудятся с одной и той же дневной производительностью. Дневная производительность рабочего-ученика меньше на 1 кубометр, чем дневная производительность опытного рабочего. Новая бригада работала 8 дней.

- (*) (1) Выразите через m дневную производительность опытного рабочего и рабочего-ученика.
(2) Сколько рабочих в новой бригаде, если известно, что они заготовили в общей сложности 336 кубометров древесины?

2. Дана арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \dots, a_{2n+3}$, в которой $2n+3$ членов (n – натуральное число).

Сумма прогрессии в 43 раза больше ее среднего члена. Средний член отличен от 0.

(*) (1) Докажите, что сумма прогрессии равна $(2n+3) \cdot a_{n+2}$.

(2) Найдите число членов прогрессии.

(*) Известно, что в данной прогрессии сумма ее членов, стоящих на нечетных местах, на 40 больше суммы ее членов, стоящих на четных местах.

(1) Найдите средний член прогрессии.

(2) Найдите сумму прогрессии.

Дано: разность данной прогрессии равна $-a_1$.

(*) Определите, возрастающей или убывающей является данная прогрессия.

Из всех членов данной прогрессии задают новую прогрессию при помощи сложения всех k соседних членов (k – натуральное число) следующим образом:

$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)$, $(a_2 + a_3 + \dots + a_{k+1})$, $(a_3 + a_4 + \dots + a_{k+2})$, ...

(*) Выразите при помощи k количество членов в новой прогрессии.

3. В средней школе ученики 12 класса сдают подготовительный экзамен [בחינת המתכונת] по обществоведению, а затем сдают экзамен на аттестат зрелости [בחינת הבגרות] по обществоведению.

Дано: как в 2017, так и в 2018 году число учеников, успешно сдавших подготовительный экзамен и провалившихся на экзамене на аттестат зрелости, было равно числу учеников, провалившихся на подготовительном экзамене и успешно сдавших экзамен на аттестат зрелости.

(*) В 2017 году 250 учеников сдавали подготовительный экзамен и затем экзамен на аттестат зрелости по обществоведению. Известно, что если ученик успешно сдал подготовительный экзамен, вероятность того, что он успешно сдаст экзамен на аттестат зрелости, равна 0.9.

Количество провалившихся на экзамене на аттестат зрелости составило 20% от общего числа учеников, сдававших экзамен в этом году.

(1) Сколько учеников сдали и подготовительный экзамен, и экзамен на аттестат зрелости?

(2) Известно, что некий ученик провалился на подготовительном экзамене. Какова вероятность, что этот ученик успешно сдаст экзамен на аттестат зрелости?

(3) Случайным образом выбирают двух учеников (с возвратом), провалившихся на экзамене на аттестат зрелости. Какова вероятность, что они оба провалились и на подготовительном экзамене?

(*) Дано, что в 2018 году не было зависимости между событием "успешно сдает подготовительный экзамен" и событием "успешно сдает экзамен на аттестат зрелости" и что вероятность успешной сдачи учеником экзамена на аттестат зрелости в этом году составила a ($0 < a < 1$).

Выразите при помощи a вероятность того, что ученик успешно сдал подготовительный экзамен и провалился на экзамене на аттестат зрелости в этом году.

/продолжение на странице 4/

Раздел второй – геометрия и тригонометрия на плоскости (20 баллов)

Ответьте на один из вопросов 4-5.

Обратите внимание! Если вы ответите более чем на один вопрос, будет проверен только первый ответ в вашей тетради.

4. Треугольник BCF вписан в окружность с центром O и радиусом R .

BF – диаметр окружности. Из точки A выходят две касательные к окружности – одна касается окружности в точке B , а другая пересекает продолжение стороны CF в точке D , как показано на чертеже.

Дано: $AD \perp CD$.

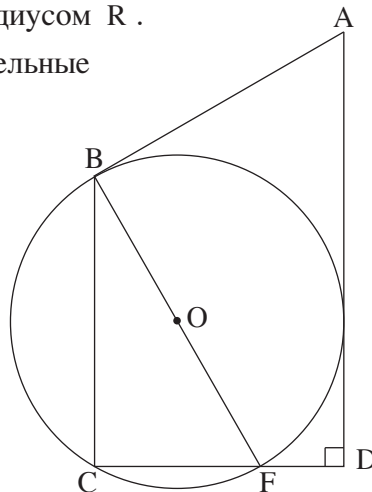
(∞) Докажите: $\angle BFC = \angle BAD$.

Дано: K – такая точка на стороне BC , что FK делит пополам $\angle BFC$.

($\mathfrak{z}$) Докажите: $KC = \frac{CF \cdot BO}{AB}$.

($\mathfrak{z}$) Докажите: $KB \cdot AB = 2R^2$.

(τ) Объясните, почему площадь $\triangle BFK$ больше площади $\triangle KFC$.



5. ABC – треугольник, вписанный в окружность с радиусом R .

Точки D и E расположены на сторонах AB и AC соответственно, а точка F – такая точка на дуге BC , что четырехугольник $ADFE$ является ромбом (смотрите чертеж).

Дано: $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$.

(∞) (1) Выразите $\angle ABF$ при помощи α и β .

(2) Выразите длину диагонали AF при помощи R , α и β .

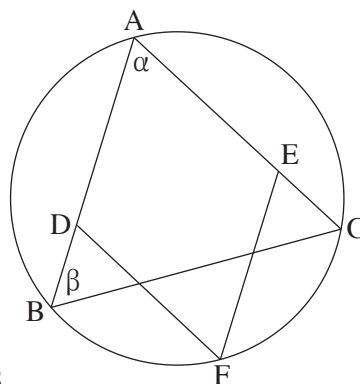
($\mathfrak{z}$) Выразите длину стороны ромба при помощи R , α и β .

Дано: AF является диаметром окружности.

($\mathfrak{z}$) Покажите, что площадь ромба равна $2R^2 \tan \frac{\alpha}{2}$.

Дано: радиус окружности, вписанной в ромб $ADFE$, равен $\frac{3}{5}R$.

(τ) Вычислите β .



Раздел третий – дифференциальное и интегральное исчисление полиномов, функций, содержащих корни, рациональных функций и тригонометрических функций (40 баллов)

Ответьте на два из вопросов 6-8 (за каждый вопрос – 20 баллов).

Обратите внимание! Если вы ответите более чем на два вопроса, будут проверены только первые два из ответов в вашей тетради.

6. Дано: функция $g''(x) = -\frac{18}{x^4} + \frac{18}{(x-4)^4}$ является второй производной функции $g(x)$.

Функции $g(x)$, $g'(x)$, $g''(x)$ имеют одну и ту же область определения.

Дано: уравнение касательной к графику функции $g(x)$ в точке ее перегиба $y = \frac{3}{2}x - 3$.

- (*) (1) Найдите функцию $g(x)$.
- (2) Какова область определения функции $g(x)$?
- (3) Найдите области возрастания и области убывания функции $g(x)$.
- (4) Начертите схематический график функции $g(x)$.

Определим: $h(x) = |g(x)|$.

(*) В той же системе координат, в которой вы начертили схематический график функции $g(x)$, начертите пунктиром схематический график функции $h(x)$.

(*) Дано: $\int_a^2 g(x) dx = t$, $0 < a < 2$, t – параметр.

Выразите $\int_a^2 (h(x) - g(x)) dx$ при помощи t .

7. Дана функция $f(x) = 2 \sin x + \cos 2x - 1$ в области $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$.

- (*) (1) Найдите координаты точек пересечения графика функции $f(x)$ с осями координат.
 (2) Найдите координаты точек экстремума функции $f(x)$ и определите их тип.
 (3) Начертите схематический график функции $f(x)$.

График функции $f(x)$ был сдвинут влево на $\frac{\pi}{2}$ так, что была получена функция $g(x)$, определенная в области $-\pi \leq x \leq \pi$.

- (*) (1) Выразите функцию $g(x)$ при помощи функции $f(x)$.
 (2) Начертите схематический график функции $g(x)$.
 (3) Докажите, что функция $g(x)$ четная.

Даны три выражения, I-III: $I: \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x + \pi) dx$ II: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) dx$ III: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx$

- (*) Укажите, которое из выражений I-III равно $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.

Обоснуйте свой ответ. Нет необходимости в вычислениях.

8. Для треугольника ABC дано: $AB = 30$, $AC = 20$.

$\angle CAB = \alpha$. α – постоянное число.

Точка D находится на стороне AB,
 а точка E находится на стороне AC (смотрите чертеж).

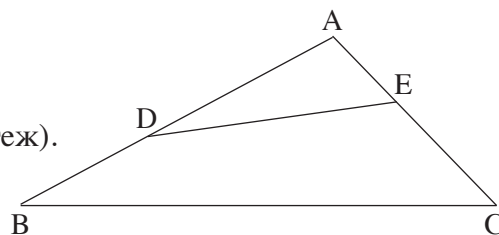
Дано: площадь образовавшегося таким образом
 треугольника ADE составляет четверть площади
 треугольника ABC.

Обозначьте длину отрезка AD как x .

- (*) Выразите при помощи x длину отрезка AE.

- (*) (1) Выразите при помощи α минимальную длину отрезка DE.

- (2) Выведите из подпункта (1)-(2) значение x , для которого отношение $\frac{DE}{BC}$ будет минимальным. Объясните.



Желаем успеха!

Авторские права принадлежат Государству Израиль.
 Копировать или публиковать можно только
 с разрешения Министерства просвещения.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.
 אין להעתיק או לפרסם
 אלא ברשות משרד החינוך.