

Mathématiques
5 unités d'étude - deuxième questionnaire

Instructions au candidat

- א. Durée de l'examen : deux heures et quart.
- ב. Structure du questionnaire et barème de notation :
Ce questionnaire comporte deux parties.
Première partie — Géométrie analytique, vecteurs, trigonométrie dans l'espace, nombres complexes.
 $2 \times 33 \frac{1}{3} - 66 \frac{2}{3}$ points
Deuxième partie — Croissance et décroissance, fonctions puissance, fonctions exponentielles et logarithmiques.
 $1 \times 33 \frac{1}{3} - 33 \frac{1}{3}$ points
Total — 100 points
- ג. Matériel auxiliaire autorisé :
(1) Calculatrice non graphique. Il est interdit d'utiliser les options de programmation d'une calculatrice programmable. L'utilisation d'une calculatrice graphique ou des options de programmation d'une calculatrice peut entraîner votre disqualification.
(2) Formulaires (jointes au sujet).
(3) Dictionnaire hébreu-langue étrangère / langue étrangère-hébreu.
- ד. Instructions supplémentaires :
(1) Ne recopiez pas la question, indiquez seulement son numéro.
(2) Commencez chaque question sur une nouvelle page. Écrivez dans le cahier d'examen les étapes de la résolution, même lorsque les calculs se font à l'aide de la calculatrice. Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, en détail et de façon claire et ordonnée. Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.
(3) Pour vos brouillons, utilisez le cahier d'examen. L'utilisation d'autres feuilles de brouillon peut entraîner votre disqualification.

Bonne chance!

מתמטיקה
5 יחידות לימוד - שאלון שני

הוראות לנבחן

- א. משך הבחינה: שתיים ורבע.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:
בשאלון זה שני פרקים.
פרק ראשון — גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים
 $66 \frac{2}{3} - 33 \frac{1}{3} \times 2$ נקודות
פרק שני — גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות
 $33 \frac{1}{3} - 33 \frac{1}{3} \times 1$ נקודות
סה"כ — 100 נקודות
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
(2) דפי נוסחאות (מצורפים).
(3) מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.
- ד. הוראות מיוחדות:
(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
(3) לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה.
שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

בהצלחה!

Questions

Attention : Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, de manière détaillée et claire.
Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Première partie - Géométrie analytique, vecteurs, trigonométrie dans l'espace et nombres complexes ($66\frac{2}{3}$ points)

Répondez à deux des questions 1-3 ($33\frac{1}{3}$ points par question).

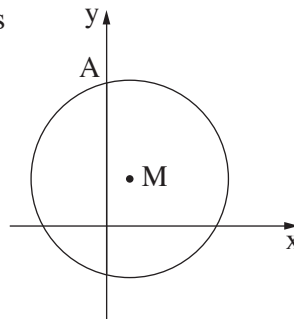
Attention : Si vous répondez à plus de deux questions, seules les deux premières réponses de votre copie seront corrigées.

1. Un cercle de centre M coupe la partie positive de l'axe des ordonnées en un point A , tel que cela est décrit dans la figure ci-contre.

À partir du centre de ce cercle, on a tracé une perpendiculaire à l'axe des ordonnées qui coupe cet axe en un point E .

Il est donné que $AE = 6$.

Il est également donné que la distance qui sépare le point M de l'origine du repère vaut la moitié de la longueur du rayon du cercle.



- ⌘. Démontrez que le lieu géométrique de tous les points M vérifiant les données de la question se situe sur une ellipse, puis déterminez son équation.

On note F_1 et F_2 les foyers de l'ellipse dont vous avez déterminé l'équation à l'article ⌘.

Les points D_1 et D_2 sont des points appartenant l'ellipse.

L'ordonnée de D_1 est positive et l'ordonnée de D_2 est négative.

- ⌘. (1) Déterminez l'aire maximale pour le quadrilatère $F_1D_1F_2D_2$. Justifiez.
(2) Existe-t-il un quadrilatère $F_1D_1F_2D_2$ ayant un périmètre maximal ? Justifiez.

2. Soit la pyramide OBCDE dont la base OBCD est un carré.

L'arête OE est perpendiculaire au plan de la base.

Données : $OD = 4$, $OE = 12$.

On a placé la pyramide dans un repère de sorte que le point O soit l'origine du repère et les points D , B , E se trouvent respectivement sur les axes des abscisses, des ordonnées et des cotes (tel que cela est décrit dans la figure).

- ⌘. Déterminez la représentation paramétrique de la droite EC .

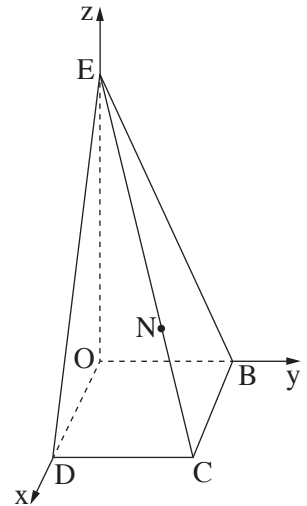
Le point N se trouve sur l'arête EC . À partir du point N , on abaisse une perpendiculaire à la base de la pyramide et qui la coupe en un point F . La distance séparant le point F de l'axe des ordonnées est 3 .

- Ⓜ. Déterminez les coordonnées du point N .

- Ⓜ. Déterminez la mesure de l'angle formé par le plan BCN et la base de la pyramide OBCD .

K est un point sur l'arête EC de sorte que KOBCD est une pyramide droite (OBCD étant la base de cette pyramide).

- Ⓜ. Déterminez la représentation paramétrique de la droite sur laquelle repose la hauteur issue du point K relative à la base.



3. ⌘. Déterminez toutes les solutions de l'équation $z^3 = \bar{z}$, $z \neq 0$. z est un nombre complexe.

- Ⓜ. (1) Déterminez l'équation du lieu géométrique de tous les points du plan de Gauss vérifiant $z^2 \cdot (\bar{z})^2 = 1$.

- (2) Montrez que toutes les solutions de l'équation de l'article ⌘ appartiennent au lieu géométrique que vous avez déterminé au sous-article Ⓜ(1).

- Ⓜ. (1) On effectue une rotation de 45° (dans le sens inverse des aiguilles d'une montre) des points correspondant aux solutions de l'équation que vous avez déterminée à l'article ⌘. Il est donné que chacun des points obtenus suite à cette rotation correspond à un nombre vérifiant l'équation $z^4 = a$.

Déterminez a .

- (2) On effectue une rotation d'un angle α (dans le sens inverse des aiguilles d'une montre) des points correspondant aux solutions de l'équation que vous avez déterminée à l'article ⌘.

Démontrez que la somme des nombres correspondant aux points obtenus suite à cette rotation vaut 0 .

Deuxième partie – Croissance et décroissance, fonctions puissance, fonctions exponentielles et logarithmiques (33 $\frac{1}{3}$ points)

Répondez à l'une des questions 4-5.

Attention : Si vous répondez à plus d'une question, seule la première réponse de votre copie sera corrigée.

4. Soit la fonction $f(x) = \frac{e^{ax} - e^x}{e^{ax} - 3e^x + 2}$, a est un paramètre.

Cette fonction admet une asymptote verticale $x = \ln 2$.

א. Déterminez a .

Substituez la valeur de a que vous avez déterminée, puis répondez aux articles ב-ה.

- ב. Déterminez le domaine de définition de la fonction $f(x)$, puis montrez que tout $x \neq 0$ de cet intervalle vérifie $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 2}$.
- ג. (1) Déterminez les asymptotes de la fonction $f(x)$ perpendiculaires aux axes.
 (2) Déterminez les intervalles de croissance et les intervalles de décroissance de la fonction $f(x)$ (s'il en existe).
 (3) Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.

On définit la fonction $h(x) = \left| \frac{e^x}{e^x - 2} - \frac{1}{2} \right|$.

- ד. (1) Donnez les asymptotes de la fonction $h(x)$ perpendiculaires aux axes.
 (2) Tracez une esquisse du graphe de la fonction $h(x)$.
 (3) Calculez l'aire délimitée par le graphe de la fonction $h(x)$, par l'axe des abscisses et par la droite $x = \ln 8$ et la droite $x = \ln 16$.

Donnée : la fonction $h(x)$ est symétrique par rapport à la droite $x = \ln 2$.

Les points A et B se trouvent sur le graphe de la fonction $h(x)$, et ils sont symétriques par rapport à la droite $x = \ln 2$.

L'abscisse du point A est $\ln 8$.

ה. Déterminez les coordonnées du point B.

5. Soit $f(x)$, une fonction dérivable pour tout x sur son domaine de définition.
- א. Démontrez que la fonction $f(x)$ et la fonction $e^{f(x)}$ admettent un point d'extremum aux mêmes abscisses, et que ces points d'extremum sont du même type (minimum ou maximum).

Soit $f(x) = x \ln(x^n)$. Le paramètre n est un entier naturel.

- ב. Déterminez le domaine de définition de la fonction $f(x)$. Considérez différentes valeurs de n .
- ג. Déterminez les coordonnées des points d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ avec l'axe des abscisses. Considérez différentes valeurs de n .

Donnée : le graphe de la fonction $f(x)$ coupe l'axe des abscisses en deux points.

- ד. (1) Montrez que la fonction $f(x)$ est impaire.
- (2) Déterminez les coordonnées des points d'extremum de la fonction $f(x)$, puis déterminez leur type (exprimez votre réponse en fonction de n si nécessaire).
- (3) Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$ pour $n = 2$.
- ה. En vous aidant de votre réponse à l'article א, déterminez les coordonnées des points d'extremum de la fonction $e^{x \ln(x^n)}$ (n étant un entier naturel), puis déterminez leur type (exprimez votre réponse en fonction de n si nécessaire).

Bonne chance!

Tous droits réservés à l'État d'Israël.
Toute copie ou publication est interdite sans l'autorisation du
Ministère de l'Éducation.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך