

Matemáticas
5 unidades de estudio – Segundo cuestionario

מתמטיקה
5 יחידות לימוד – שאלון שני

Instrucciones para el examen

א. Duración del examen: Dos horas y cuarto.

ב. Estructura del cuestionario y clave de la evaluación:

Este cuestionario consta de dos partes.

Primera parte – Geometría analítica, vectores, trigonometría
 del espacio, números complejos
 $2 \times 33 \frac{1}{3} - 66 \frac{2}{3}$ puntos
 Segunda parte – Crecimiento y decrecimiento, funciones potencia,
 funciones exponenciales y logarítmicas
 $1 \times 33 \frac{1}{3} - 33 \frac{1}{3}$ puntos
 Total – 100 puntos

ג. Material auxiliar permitido:

- (1) Una calculadora no gráfica. No se admite la posibilidad de programación con calculadoras programables. El uso de calculadora gráfica o de la posibilidad de programación de las calculadoras programables puede causar la anulación del examen.
- (2) Hojas de fórmulas (adjuntas).
- (3) Diccionario hebreo-lengua extranjera / lengua extranjera-hebreo.

ד. Instrucciones especiales:

- (1) No copies la pregunta; indica sólo su número.
- (2) Inicia cada respuesta a una nueva pregunta en una nueva hoja. Indica en el cuadernillo las etapas de la resolución, aun en el caso en que realices tus cálculos utilizando la calculadora.
Explica detalladamente y de forma clara y ordenada, todas tus operaciones, incluidos los cálculos.
La falta de detalles puede perjudicar la nota o causar la anulación del examen.
- (3) Como borrador puedes usar las hojas del cuadernillo del examen.
El uso de otros borradores puede causar la anulación del examen.

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שתיים ורבע.

ב. מבנה השאלון ומפתח הערכה:

בשאלון זה שני פרקים.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים,
 טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים
 $2 \times 33 \frac{1}{3} - 66 \frac{2}{3}$ נקודות
 פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות
 מעריכיות ולוגריתמיות
 $1 \times 33 \frac{1}{3} - 33 \frac{1}{3}$ נקודות
 סה"כ – 100 נקודות

ה. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).
- (3) מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ו. הוראות מיוחדות:

- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
- (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
- (3) לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה. שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

Preguntas

Presta atención: Explica detalladamente y de forma clara y ordenada, todas tus operaciones, incluidos los cálculos.

La falta de detalles puede perjudicar la nota o causar la anulación del examen.

Primera parte — Geometría analítica, vectores, trigonometría del espacio, números complejos ($66\frac{2}{3}$ puntos)

Responde a dos de las preguntas 1 – 3 (cada pregunta $33\frac{1}{3}$ puntos).

¡Presta atención! Si respondes a más de dos preguntas, solo las dos primeras respuestas de tu cuadernillo serán tenidas en cuenta para la corrección.

1. Se da una parábola canónica $y^2 = 2px$. $p > 0$ es un parámetro.

Los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ se hallan sobre la parábola.

Dato: la pendiente de la recta AB es $\frac{4}{3}$,

la coordenada y que se halla en el punto medio del segmento AB es 9.

א. Halla la ecuación de la parábola.

Dato: las tangentes a la parábola que pasan por los puntos A y B son perpendiculares la una a la otra.

ב. Halla las coordenadas de los puntos A y B (el punto A se halla en el primer cuadrante).

ג. Halla otro par de puntos que se hallen sobre la parábola cuyas tangentes a la parábola sean perpendiculares la una a la otra.

2. En el paralelepípedo $ABCA'B'C'D'$ el punto L es el punto medio de la arista BB' y el punto G es el punto de intersección de las diagonales de la cara $A'B'C'D'$.

El punto K es el punto medio del segmento LG (ver dibujo).

Indicaremos: $\overrightarrow{AD} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.

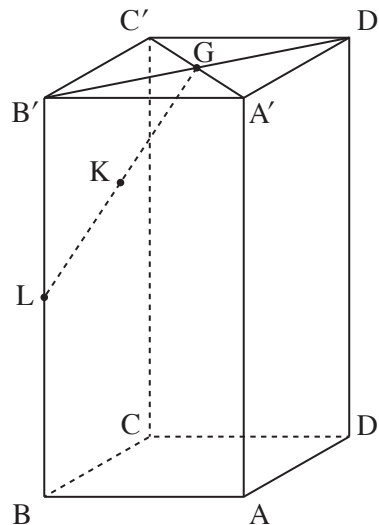
א. Expresa $\overrightarrow{DK}$ por medio de $\underline{u}$, $\underline{v}$ y $\underline{w}$.

- ב. Demuestra que el punto K se halla sobre la diagonal DB' , y halla la relación $\frac{DK}{DB'}$.

La prolongación del segmento AK corta al plano $BCC'B'$ en el punto F .

Dato: $\overrightarrow{AF} = s \cdot \underline{u} + \underline{v} + t \cdot \underline{w}$.

- ג. (1) Halla s y t , y muestra que el punto F se halla sobre la arista $B'C'$.
 (2) Halla la relación $\frac{B'F}{B'C'}$.



3. z_A , z_B y z_C son tres números complejos diferentes entre sí los cuales representan los puntos A , B y C en el plano de Gauss respectivamente.

Dato: $|z_A| = |z_B| = |z_C| = \sqrt{65}$,

El punto A está en el primer cuadrante,

z_A y z_C cumplen con la ecuación: $(8 - i)z = (8 + i)\bar{z}$.

- א. (1) Halla z_A y z_C .
 (2) Explica por qué $\angle ABC = 90^\circ$.

Dato: $AB = BC$.

- ב. Halla z_B (halla las dos posibilidades).

Dato: El punto B se halla en el segundo cuadrante.

- ג. a_n es una progresión geométrica en la que $a_1 = z_A$ y $a_2 = z_B$.

Dato: m es un número natural, tal que la suma de los primeros m términos de la progresión a_n es 0.

Explica por qué m es divisible por 4 sin resto.

Segunda parte — Crecimiento y decrecimiento, funciones potencia funciones exponenciales y logarítmicas ($33\frac{1}{3}$ puntos)

Responde a una de las preguntas 4 – 5.

¡Presta atención! Si respondes a más de una pregunta, sólo la primera respuesta de tu cuadernillo será tenida en cuenta para la corrección.

4. Se da la función $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$.

Indicaremos: $g(x) = e^x - x$.

- א. (1) ¿Cuál es el dominio de definición de la función $g(x)$?
 (2) Halla las coordenadas de los puntos de extremo de la función $g(x)$, y explica por qué para todo x se cumple $e^x - x \geq 1$.
- ב. (1) ¿Cuál es el dominio de definición de la función $f(x)$? Justifica tu respuesta.
 (2) Halla las ecuaciones de las asíntotas de la función $f(x)$ que son perpendiculares a los ejes (si las hay).
 (3) Halla las coordenadas de los puntos de intersección del gráfico de la función $f(x)$ con los ejes (si los hay).
 (4) Muestra que $f'(x) = \frac{2e^x - xe^x - 1}{(e^x - x)^2}$.

Se sabe que la expresión $2e^x - xe^x - 1$ está definida para todo x positivo en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$.

- ג. (1) Calcula $f(-1)$ y $f(1)$, y traza un esbozo del gráfico de la función $f(x)$ en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$.
 (2) Bázate en los apartados anteriores y explica por qué la función $f(x)$ tiene como mínimo dos puntos de extremo en todo su dominio de definición.
- ד. Calcula el área delimitada por el eje x , por la recta $x = -1$ y por el gráfico de la función $f(x)$ en el intervalo $-1 \leq x \leq 0$.

5. Se da la función: $f(x) = \ln(e^{2x} + b)$. $b > 0$ es un parámetro.

א. (1) Halla el dominio de definición de la función $f(x)$.

(2) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ (si los hubiere).

Se da la función: $g(x) = \ln(e^x + be^{-x})$

ב. Halla el dominio de definición de la función $g(x)$.

ג. (1) Demuestra que $f(x) - g(x) = x$.

(2) Halla las coordenadas de los puntos de intersección de los gráficos de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ (si fuere necesario exprésalos por medio de b).

Se sabe que el punto de mínimo de la función $g(x)$ se halla sobre la asíntota de la función $f(x)$.

ד. Halla el valor del parámetro b .

ה. Sustituye $b = 4$ y traza en el mismo sistema de ejes un esbozo de los gráficos de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

¡Buena Suerte!

Los derechos de autor están reservados al Estado de Israel.
Se prohíbe su copia o publicación salvo la autorización expresa
del Ministerio de Educación.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך