

## Matemáticas

### 5 unidades de estudio—Primer cuestionario

#### Instrucciones para el examen

א. Duración del examen: Tres horas y media.

ב. Estructura del cuestionario y clave de la evaluación:

Este cuestionario consta de tres partes.

Primera parte – Álgebra y Probabilidad –  $2 \times 20$  – 40 puntos

Segunda parte –

Geometría y Trigonometría del plano  $1 \times 20$  – 20 puntos

Tercera parte – Cálculo diferencial e integral de polinomios, de funciones radical, de funciones racionales y de funciones trigonométricas.

$2 \times 20$  – 40 puntos

Total – 100 puntos

ג. Material auxiliar permitido :

- (1) Una calculadora no gráfica. No se admite la posibilidad de programación con calculadoras programables.  
El uso de calculadora gráfica o de la posibilidad de programación de las calculadoras programables puede causar la anulación del examen.
- (2) Hojas de fórmulas (adjuntas).
- (3) Diccionario hebreo-lengua extranjera / lengua extranjera-hebreo.

ד. Instrucciones especiales:

- (1) No copies la pregunta; indica solo su número.
- (2) Inicia cada respuesta a una nueva pregunta en una nueva hoja.  
Indica en el cuadernillo las etapas de la resolución, aun en el caso en que realices tus cálculos utilizando la calculadora.  
Explica detalladamente y de forma clara y ordenada, todas tus operaciones, incluidos los cálculos.  
La falta de detalles puede perjudicar la nota o causar la anulación del examen.
- (3) Como borrador debes usar las hojas del cuadernillo del examen.  
El uso de otros borradores puede causar la anulación del examen.

¡Buena Suerte!

## מתמטיקה

### 5 יחידות לימוד - שאלון ראשון

#### הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות –  $2 \times 20$  – 40 נקודות

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

$1 \times 20$  – 20 נקודות

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים;

של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות

טריגונומטריות  $2 \times 20$  – 40 נקודות

סה"כ – 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).
- (3) מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
- (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.  
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.  
חסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
- (3) לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה.  
שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

בהצלחה!

## Preguntas

**Presta atención:** Explica detalladamente y de forma clara y ordenada, todas tus operaciones, incluidos los cálculos. La falta de detalles puede perjudicar la nota o causar la anulación del examen.

### Primera parte – Álgebra y Probabilidad (40 puntos)

Responde a dos de las preguntas 1 – 3 (cada pregunta – 20 puntos).

**Presta atención:** Si respondes a más de dos preguntas, solo las dos primeras respuestas de tu cuadernillo serán tenidas en cuenta para la corrección.

1. La distancia desde la casa de Renaná hasta la escuela es de 500 metros.

Renaná salió de su casa hacia la escuela y caminó a velocidad constante.

3 minutos después de la partida, salió de su casa tras ella su padre para llevarle el sándwich que ella olvidó. Corrió a una velocidad constante de 2.5 metros por segundo.

Cuando el padre alcanzó a Renaná se detuvieron y conversaron por espacio de 2 minutos, él le entregó el sándwich y después de eso cada uno de ellos retomó la marcha – ella a la escuela y él de vuelta a su casa. Renaná continuó su marcha a la misma velocidad a la que había andado antes, y el padre caminó a una velocidad de 1.5 metros por segundo.

El padre de Renaná llegó a su casa en el mismo instante en que Renaná llegó a la escuela.

א. Calcula la velocidad de marcha de Renaná.

ב. ¿Cuánto tiempo transcurrió desde el momento en que Renaná salió de su casa hasta que llegó a la escuela?

2. La sucesión  $a_n$  está definida para todo  $n$  natural por regla recursiva:

$$a_{n+1} = -\frac{c^{n-2}}{a_n}, a_1 = -\frac{1}{c}. \text{ Se sabe que: } c > 0.$$

- א. Demuestra que los términos de la sucesión  $a_n$  que se hallan en los lugares impares constituyen una progresión geométrica, y que los términos de la sucesión  $a_n$  que se hallan en los lugares pares también constituyen una progresión geométrica.
- ב. (1) Escribe los 7 primeros términos de la sucesión  $a_n$ . Expresa tu respuesta por medio de  $c$  si fuere necesario.
- (2) Expresa por medio de  $c$  la suma de los 7 primeros términos de la sucesión  $a_n$ .
- (3) Demuestra que para cada  $n$  natural, la suma de los  $2n - 1$  primeros términos de la sucesión  $a_n$  no depende de  $n$ .
- ג. La sucesión  $b_n$  se define de la siguiente manera:  $b_n = -\frac{2}{a_n \cdot a_{n+1}}$ .
- (1) Muestra que  $b_n$  es una progresión geométrica.
- (2) ¿Cuál es el intervalo de valores de  $c$  para los cuales  $b_n$  es una sucesión decreciente?
- (3) Se sabe que la sucesión infinita  $b_n$  es decreciente.
- Expresa su suma por medio de  $c$ .

3. En un examen con respuestas de elección múltiple (americano) hay 5 preguntas.

Para cada pregunta se exponen 4 respuestas, pero solo una de ellas es correcta.

Los alumnos deben marcar una respuesta de las 4 respuestas expuestas.

El alumno que marca la respuesta correcta a la pregunta recibe 20 puntos por esa pregunta.

El alumno que marca una respuesta incorrecta no recibe puntos por esa pregunta.

Para aprobar el examen hay que acumular por lo menos un total de 60 puntos.

א. Shahar sabía con seguridad las respuestas correctas a 2 de las preguntas y las marcó.

En cada una de las preguntas restantes marcó al azar una respuesta en cada pregunta.

(1) ¿Cuál es la probabilidad de que Shahar acumule en el examen exactamente 60 puntos?

(2) ¿Cuál es la probabilidad de que Shahar pase el examen?

ב. Daniel sabía con seguridad las respuestas correctas a 2 de las preguntas y las marcó.

En cada una de las otras 3 preguntas supo con certeza que una de las 4 respuestas expuestas no era correcta, y por lo tanto marcó al azar una de las otras respuestas en cada pregunta.

¿Cuál es la probabilidad de que Daniel acumule en el examen exactamente 60 puntos?

ג. Hadas sabía con seguridad las respuestas correctas a 3 de las preguntas y las marcó.

En cada una de las otras dos preguntas ella supo con certeza que k de las 4 respuestas expuestas no eran correctas, y marcó al azar una de las otras respuestas en cada pregunta.

Se sabe que la probabilidad de que Hadas acumule exactamene 60 puntos en el examen es igual a la probabilidad de que acumule 100 puntos en el examen.

Halla k. Justifica tu respuesta.

## Segunda parte – Geometría y Trigonometría del plano (20 puntos)

Responde a una de las preguntas 4 – 5 .

**Presta atención:** Si respondes a más de una pregunta, solo la primera respuesta de tu cuadernillo será tomada en cuenta para su corrección.

4. ABC es un triángulo isósceles ( $AB = BC$ ) .

AK y CL son medianas del triángulo, que se cortan en el punto D .

Se sabe que:  $AK \perp CL$  .

א. Demuestra:  $BD = AC$  .

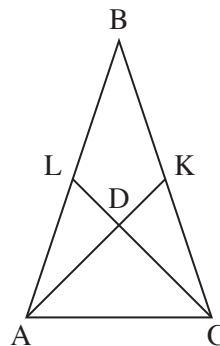
ב. Calcula la relación  $\frac{S_{\triangle BDK}}{S_{\triangle ABC}}$  .

ג. M es el centro de una circunferencia en la que se halla inscripto el cuadrilátero ALKC .

(1) Demuestra que:  $\angle AML = 90^\circ$  .

(2) Halla la relación  $\frac{AM}{AD}$  .

En tu respuesta puedes dejar la raíz indicada .



5. ABC es un triángulo isósceles ( $AB = BC$ ) .

BD es una bisectriz en el triángulo ABC .

La prolongación del segmento BD corta a la circunferencia en la que se halla inscripto el triángulo ABC en el punto E .

La magnitud del ángulo ABC es  $2\beta$  .

א. Expresa la relación entre el área del triángulo ABC y el área del triángulo ADE,  $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}}$ , por medio de  $\beta$ .

No hace falta simplificar la expresión que obtuviste.

Dato: BE tiene la misma longitud que el radio de la circunferencia en la que se halla inscripto el triángulo ABC .

ב. Calcula la relación  $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}}$  .

Indicaremos con a la longitud del lado AB .

ג. Expresa por medio de a el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC .

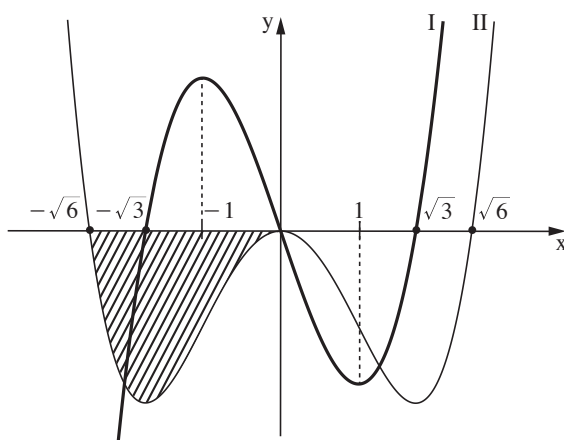
En tu respuesta, basta con dejar dos cifras decimales.

### Tercera parte – Cálculo diferencial e integral de polinomios, de funciones radical, de funciones racionales y de funciones trigonométricas (40 puntos)

Responde a dos de las preguntas 6 - 8 (cada pregunta – 20 puntos).

**Presta atención:** Si respondes a más de dos preguntas, solo las dos primeras respuestas en tu cuadernillo serán tenidas en cuenta para su corrección.

6. A continuación se hallan los gráficos de las funciones  $f'(x)$  y  $f''(x)$  (funciones de la derivada primera y de la derivada segunda de la función  $f(x)$ ) en el intervalo  $-2.5 \leq x \leq 2.5$ . Los dos gráficos pasan por el origen de coordenadas.



- א. Haz corresponder los gráficos I y II con las funciones  $f'(x)$  y  $f''(x)$ . Justifica tu respuesta.
- ב. (1) ¿Cuántos puntos de extremo internos tiene la función  $f(x)$  en el intervalo descrito en el gráfico? Justifica tu respuesta.  
 (2) ¿Cuántos puntos de inflexión tiene la función  $f(x)$  en el intervalo descrito en el gráfico? Justifica tu respuesta.
- ג. ¿Para qué valor de  $x$  en el intervalo  $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$  la pendiente de la tangente al gráfico de la función derivada,  $f'(x)$ , es mínima?  
 Dato:  $f(x)$  es una función impar.
- ד. Traza un esbozo del gráfico de la función  $f(x)$ .  
 Dato: El valor de la función  $f(x)$  en su punto de máximo es  $t$ .
- ה. Expresa por medio de  $t$  el área limitada por el gráfico II y por la parte negativa del eje  $x$  (el área rayada en el dibujo).
- ו. Dato: Existen  $a, b$  y  $c$  reales tales que  $f(x) = ax^5 + bx^3 + c$ .  
 Halla  $c$  y la relación  $\frac{a}{b}$ .

/Continúa en la página 7/

7. Se da la función  $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ .

א. ¿Cuál es el dominio de definición de la función  $f(x)$  ?

Responde a los apartados ב-ה para el intervalo  $x \geq \frac{2}{7}$ .

ב. Halla las coordenadas de los puntos de intersección del gráfico de la función  $f(x)$  con el eje  $x$ .

ג. Halla las coordenadas de los puntos de extremo de la función  $f(x)$  y determina su tipo.

ד. La función  $f(x)$  tiene una asíntota horizontal. Halla la ecuación de la asíntota horizontal de la función  $f(x)$ .

ה. Traza un esbozo del gráfico de la función  $f(x)$ .

Responde al apartado ו para el intervalo  $x > 0$ .

ו. Observemos los puntos de intersección del gráfico de la función  $f(x)$  con el eje  $x$ .

A continuación te presentamos 3 proposiciones (i-iii), una de las cuales es verdadera.

¿Cuál de ellas es la verdadera? Justifica tu respuesta.

i) A medida que nos acercamos a  $x = 0$ , la distancia entre dos puntos de intersección vecinos disminuye.

ii) La distancia entre dos puntos de intersección vecinos permanece constante.

iii) A medida que nos acercamos a  $x = 0$ , la distancia entre dos puntos de intersección vecinos aumenta.

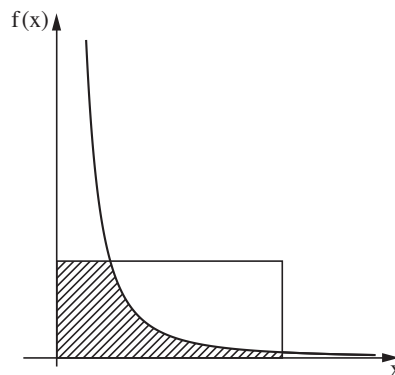
8. En el dibujo que se halla a continuación se describe el gráfico de la función  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  en el intervalo  $x > 0$ , y un rectángulo dos de cuyos lados se hallan sobre los ejes y en el primer cuadrante.

Dato: el área del rectángulo es 4.

Indicaremos con  $a$  la longitud del lado del rectángulo que se halla sobre el eje  $x$ . Dato:  $a \geq \frac{1}{4}$ .

א. Expresa por medio de  $a$  el área limitada por los ejes, por medio de los lados del rectángulo y por el gráfico de la función  $f(x)$  (El área rayada en la figura).

ב. ¿Para qué valor de  $a$  el área que hallaste en el apartado א es máxima?



**¡Buena Suerte!**

Los derechos de autor están reservados al Estado de Israel.  
 Se prohíbe su copia o publicación salvo la autorización expresa  
 del Ministerio de Educación.

**בהצלחה!**

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל  
 אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך