

Mathématiques
5 unités d'étude - deuxième questionnaire

Instructions au candidat

- א. Durée de l'examen : deux heures et quart.
- ב. Structure du questionnaire et barème de notation :
Ce questionnaire comporte deux parties.
Première partie — Géométrie analytique, vecteurs, trigonométrie dans l'espace, nombres complexes.
 $2 \times 33 \frac{1}{3} - 66 \frac{2}{3}$ points
Deuxième partie — Croissance et décroissance, fonctions puissance, fonctions exponentielles et logarithmiques.
 $1 \times 33 \frac{1}{3} - 33 \frac{1}{3}$ points
Total — 100 points
- ג. Matériel auxiliaire autorisé :
(1) Calculatrice non graphique. Il est interdit d'utiliser les options de programmation d'une calculatrice programmable. L'utilisation d'une calculatrice graphique ou des options de programmation d'une calculatrice peut entraîner votre disqualification.
(2) Formulaires (jointes au sujet).
(3) Dictionnaire hébreu-langue étrangère / langue étrangère-hébreu.
- ד. Instructions supplémentaires :
(1) Ne recopiez pas la question ; indiquez seulement son numéro.
(2) Commencez chaque question sur une nouvelle page. Écrivez dans le cahier d'examen les étapes de la résolution, même lorsque les calculs se font à l'aide de la calculatrice. Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, en détail et de façon claire et ordonnée. Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.
(3) Pour vos brouillons, utilisez le cahier d'examen. L'utilisation d'autres feuilles de brouillon peut entraîner votre disqualification.

Bonne chance !

מתמטיקה
5 יחידות לימוד - שאלון שני

הוראות לנבחן

- א. משך הבחינה: שתיים ורבע.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:
בשאלון זה שני פרקים.
פרק ראשון — גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים
 $2 \times 33 \frac{1}{3} - 66 \frac{2}{3}$ נקודות
פרק שני — גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות
 $1 \times 33 \frac{1}{3} - 33 \frac{1}{3}$ נקודות
סה"כ — 100 נקודות
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
(2) דפי נוסחאות (מצורפים).
(3) מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.
- ד. הוראות מיוחדות:
(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
(3) לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה.
שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

בהצלחה !

Questions

Attention : Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, de manière détaillée et claire.
Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Première partie - Géométrie analytique, vecteurs, trigonométrie dans l'espace et nombres complexes ($66\frac{2}{3}$ points)

Répondez à deux des questions 1-3 ($33\frac{1}{3}$ points par question).

Attention : Si vous répondez à plus de deux questions, seules les deux premières réponses de votre cahier seront corrigées.

1. Soit la parabole canonique $y^2 = 2px$. $p > 0$ est un paramètre.

Les points $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$ se situent sur la parabole.

Données : le coefficient directeur de la droite AB est $\frac{4}{3}$,

l'ordonnée du milieu du segment AB est 9.

א. Déterminez l'équation de la parabole.

Donnée : les tangentes à la parabole aux points A et B sont perpendiculaires entre elles.

ב. Déterminez les coordonnées des points A et B (le point A se situe dans le premier quadrant).

ג. Déterminez un autre couple de points situés sur la parabole pour lesquels les tangentes à la parabole en ces points sont perpendiculaires entre elles.

2. Dans le pavé ABCDA'B'C'D', le point L est le milieu de l'arête BB' et le point G est l'intersection des diagonales de la face A'B'C'D'.

Le point K est le milieu du segment LG (voir figure).

On note : $\overrightarrow{AD} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.

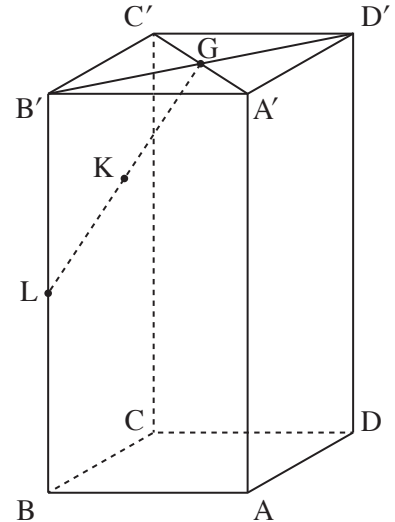
⌘. Exprimez $\overrightarrow{DK}$ en fonction de $\underline{u}$, $\underline{v}$ et $\underline{w}$.

- ⌚. Démontrez que le point K se situe sur la diagonale DB', puis déterminez le rapport $\frac{DK}{DB'}$.

Le prolongement du segment AK coupe le plan BCC'B' en un point F.

Donnée : $\overrightarrow{AF} = s \cdot \underline{u} + \underline{v} + t \cdot \underline{w}$.

- ⌘. (1) Déterminez s et t, puis montrez que le point F se situe sur l'arête B'C'.
- (2) Déterminez le rapport $\frac{B'F}{B'C'}$.



3. z_A , z_B et z_C sont trois nombres complexes différents l'un de l'autre représentant respectivement les points A, B et C dans le plan de Gauss.

Données : $|z_A| = |z_B| = |z_C| = \sqrt{65}$,

le point A se situe dans le premier quadrant,

z_A et z_C vérifient l'équation : $(8 - i)z = (8 + i)\bar{z}$.

- ⌘. (1) Déterminez z_A et z_C .
- (2) Expliquez pourquoi $\angle ABC = 90^\circ$.

Donnée : $AB = BC$.

- ⌚. Déterminez z_B (déterminez les deux possibilités).

Donnée : Le point B se situe dans le deuxième quadrant.

- ⌘. a_n est une suite géométrique pour laquelle $a_1 = z_A$ et $a_2 = z_B$.

Donnée : m est un entier naturel, tel que la somme des m premiers termes de la suite a_n est 0.

Expliquez pourquoi m est divisible par 4 sans reste.

Deuxième partie – Croissance et décroissance, fonctions puissance, fonctions exponentielles et logarithmiques ($33\frac{1}{3}$ points)

Répondez à l'une des questions 4-5.

Attention : Si vous répondez à plus d'une question, seule la première réponse de votre cahier sera corrigée.

4. Soit la fonction $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$.

On note : $g(x) = e^x - x$.

א. (1) Quel est le domaine de définition de la fonction $g(x)$?

(2) Déterminez les coordonnées des points d'extremum de la fonction $g(x)$, puis expliquez pourquoi tout x vérifie $e^x - x \geq 1$.

ב. (1) Quel est le domaine de définition de la fonction $f(x)$? Justifiez.

(2) Déterminez les équations des asymptotes de la fonction $f(x)$ qui sont perpendiculaires aux axes (s'il en existe).

(3) Déterminez les coordonnées des points d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ avec les axes (s'il en existe).

(4) Montrez que $f'(x) = \frac{2e^x - xe^x - 1}{(e^x - x)^2}$.

On sait que l'expression $2e^x - xe^x - 1$ est définie pour tout x et est positive sur l'intervalle $-1 \leq x \leq 1$.

ג. (1) Calculez $f(-1)$ et $f(1)$, puis tracez l'esquisse du graphe de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $-1 \leq x \leq 1$.

(2) En vous appuyant sur les paragraphes précédents, expliquez pourquoi la fonction $f(x)$ admet au moins deux points d'extremum sur la totalité de son domaine de définition.

ד. Calculez l'aire délimitée par l'axe des abscisses, par la droite $x = -1$ et par le graphe de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $-1 \leq x \leq 0$.

5. Soit la fonction $f(x) = \ln(e^{2x} + b)$. $b > 0$ est un paramètre.

- א. (1) Déterminez le domaine de définition de la fonction $f(x)$.
(2) Déterminez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction $f(x)$ (s'il en existe).

Soit la fonction : $g(x) = \ln(e^x + be^{-x})$.

- ב. Déterminez le domaine de définition de la fonction $g(x)$.
ג. (1) Démontrez que $f(x) - g(x) = x$.
(2) Déterminez les coordonnées du point d'intersection des graphes des fonctions $f(x)$ et $g(x)$ (exprimez en fonction de b , si cela est nécessaire).

On donne que le point de minimum de la fonction $g(x)$ se situe sur l'asymptote de la fonction $f(x)$.

- ד. Déterminez la valeur du paramètre b .
ה. Substituez $b = 4$, puis tracez les esquisses des graphes des fonctions $f(x)$ et $g(x)$ dans un même repère.

Bonne chance!

Tous droits réservés à l'État d'Israël.
Toute copie ou publication est interdite sans l'autorisation du
Ministère de l'Éducation.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך