

Mathématiques

5 unités d'étude - premier questionnaire

Instructions au candidat

א. Durée de l'examen : trois heures et demie.

ב. Structure du questionnaire et barème de notation :

Ce questionnaire comporte trois parties.

Première partie — Algèbre et probabilités

2 × 20 — 40 points

Deuxième partie — Géométrie et trigonométrie planes

1 × 20 — 20 points

Troisième partie — Calcul différentiel et intégral
de polynômes, de fonctions racines,
de fonctions rationnelles
et de fonctions trigonométriques

2 × 20 — 40 points

Total — 100 points

ג. Matériel auxiliaire autorisé :

- (1) Calculatrice non graphique. Il est interdit d'utiliser les options de programmation d'une calculatrice programmable. L'utilisation d'une calculatrice graphique ou des options de programmation d'une calculatrice peut entraîner votre disqualification.
- (2) Formulaires (jointés au sujet).
- (3) Dictionnaire hébreu-langue étrangère / langue étrangère-hébreu.

ד. Instructions supplémentaires :

- (1) Ne recopiez pas la question, indiquez seulement son numéro.
- (2) Commencez chaque question sur une nouvelle page. Écrivez dans le cahier d'examen les étapes de la résolution, même lorsque les calculs se font à l'aide de la calculatrice. Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, en détail et de façon claire et ordonnée. Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.
- (3) Pour vos brouillons, utilisez le cahier d'examen. L'utilisation d'autres feuilles de brouillon peut entraîner votre disqualification.

Bonne chance !

מתמטיקה

5 יחידות לימוד - שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות

20 × 2 — 40 נקודות

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור

20 × 1 — 20 נקודות

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

של פולינומים, של פונקציות שורש,

של פונקציות רציונליות

ושל פונקציות טריגונומטריות

20 × 2 — 40 נקודות

סה"כ — 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).
- (3) מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
- (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
- (3) לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה. שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

בהצלחה !

Questions

Attention ! Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, de manière détaillée et claire.
Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Première partie – Algèbre et probabilités (40 points)

Répondez à deux des questions 1-3 (20 points par question).

Attention ! Si vous répondez à plus de deux questions, seules les deux premières réponses de votre copie seront corrigées.

1. La distance entre la maison de Rénana et l'école est de 500 mètres.
Rénana est allée de chez elle à l'école en marchant à une vitesse constante.
3 minutes après qu'elle est sortie de chez elle, son père l'a suivie depuis le même endroit pour lui amener un sandwich qu'elle avait oublié. Il a couru à une vitesse constante de 2,5 mètres par seconde.

Lorsque le père a rattrapé Rénana, ils se sont arrêtés et ont discuté durant 2 minutes, il lui a donné le sandwich, puis chacun a repris son chemin – Rénana vers l'école et le père vers la maison. Rénana a continué à marcher à la même vitesse que précédemment, et le père a marché à une vitesse de 1,5 mètre par seconde.

Le père de Rénana est arrivé à la maison exactement au même moment où Rénana est arrivée à l'école.

א. Calculez la vitesse de marche de Rénana.

ב. Combien de temps s'est écoulé entre le moment où Rénana est sortie de sa maison et le moment où elle est arrivée à l'école ?

2. La suite a_n est définie par récurrence pour tout n entier naturel :

$$a_{n+1} = -\frac{c^{n-2}}{a_n}, \quad a_1 = -\frac{1}{c}. \text{ Donnée : } c > 0.$$

א. Démontrez que les termes de la suite a_n se trouvant aux emplacements impairs constituent une suite géométrique et que les termes de la suite a_n se trouvant aux emplacements pairs constituent également une suite géométrique.

- ב. (1) Donnez les 7 premiers termes de la suite a_n . Exprimez votre réponse en fonction de c si besoin.
(2) Exprimez la somme des 7 premiers termes de la suite a_n en fonction de c .
(3) Démontrez que pour tout n entier naturel, la somme des $2n - 1$ premiers termes de la suite a_n ne dépend pas de n .

ג. La suite b_n est définie de la manière suivante : $b_n = -\frac{2}{a_n \cdot a_{n+1}}$.

- (1) Montrez que b_n est une suite géométrique.
(2) Quel est l'intervalle de valeurs de c pour lesquelles b_n est une suite décroissante ?
(3) Il est donné que la suite infinie b_n est une suite décroissante.
Exprimez sa somme en fonction de c .

/Suite en page 3/

3. Un examen sous forme de questionnaire à choix multiples ("américain") comporte 5 questions. Pour chaque question il y a 4 réponses possibles mais seule l'une d'entre elles est juste. Les élèves doivent cocher une réponse parmi les 4 réponses possibles. Un élève qui coche la bonne réponse à la question obtient 20 points pour cette question. Un élève qui coche une réponse fausse à la question n'obtient pas de point pour cette question. Pour réussir l'examen, il faut totaliser au moins 60 points.
- א. Chah'ar connaissait avec certitude la bonne réponse à 2 des questions, et il les a cochées. Pour chacune des autres questions, il a coché une réponse au hasard.
- (1) Quelle est la probabilité que Chah'ar totalise à cet examen exactement 60 points ?
- (2) Quelle est la probabilité que Chah'ar réussisse l'examen ?
- ב. Daniel connaissait avec certitude la bonne réponse à 2 des questions, et il les a cochées. Pour chacune des trois autres questions, il savait avec certitude que l'une des 4 réponses possibles était fausse. Par conséquent, il a coché au hasard une des autres réponses pour chacune de ces questions. Quelle est la probabilité que Daniel totalise à cet examen exactement 60 points ?
- ג. Hadass connaissait avec certitude la bonne réponse à 3 des questions, et elle les a cochées. Pour chacune des 2 autres questions, elle savait avec certitude que k des 4 réponses possibles étaient fausses. Par conséquent, elle a coché au hasard l'une des autres réponses pour chacune de ces questions. On sait que la probabilité que Hadass totalise exactement 60 points à l'examen est égale à la probabilité qu'elle totalise 100 points à l'examen. Déterminez k . Justifiez.

Deuxième partie – Géométrie et trigonométrie planes (20 points)

Répondez à l'une des questions 4-5 .

Attention : Si vous répondez à plus d'une question, seule la première réponse de votre copie sera corrigée.

4. ABC est un triangle isocèle ($AB = BC$).

AK et CL sont des médianes du triangle, qui se coupent au point D .

Donnée : $AK \perp CL$.

א. Démontrez que $BD = AC$.

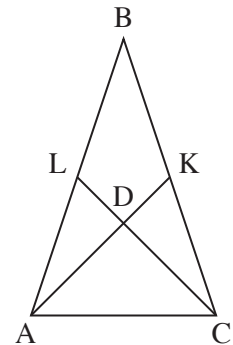
ב. Calculez le rapport $\frac{S_{BLDK}}{S_{\triangle ABC}}$.

ג. M est le centre du cercle circonscrit au quadrilatère ALKC .

(1) Démontrez que $\angle AML = 90^\circ$.

(2) Déterminez le rapport $\frac{AM}{AD}$.

Vous pourrez laisser une racine dans votre réponse.



5. ABC est un triangle isocèle ($AB = AC$) .

BD est une bissectrice du triangle ABC .

Le prolongement du segment BD coupe le cercle circonscrit au triangle ABC au point E .

La mesure de l'angle ABC est 2β .

א. Exprimez $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}}$, le rapport entre l'aire du triangle ABC et l'aire du triangle ADE, en fonction de β .

Il n'est pas nécessaire de simplifier l'expression obtenue.

Donnée : La longueur de BE est égale à celle du rayon du cercle circonscrit au triangle ABC .

ב. Calculez le rapport $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}}$.

On note a la longueur du côté AB .

ג. Exprimez le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC en fonction de a.

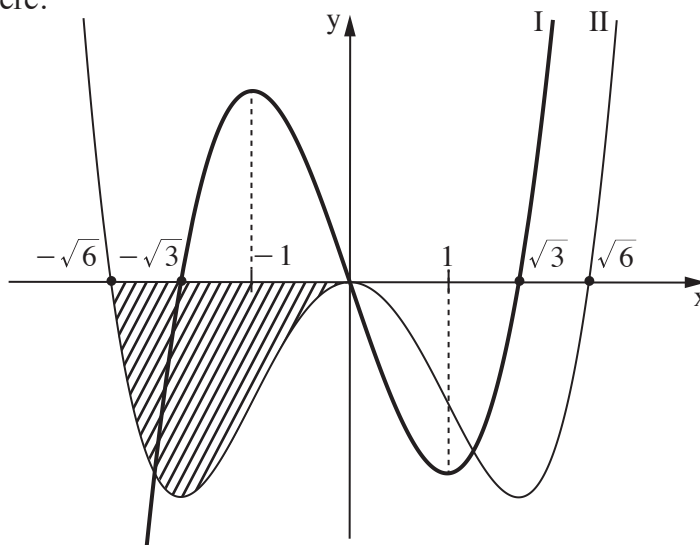
Dans vos réponses, vous laisserez deux chiffres après la virgule.

Troisième partie – Calcul différentiel et intégral de polynômes, de fonctions racines, de fonctions rationnelles et de fonctions trigonométriques (40 points)

Répondez à deux des questions 6-8 (20 points par question).

Attention : Si vous répondez à plus de deux questions, seules les deux premières réponses de votre copie seront corrigées.

6. Soit les graphes des fonctions $f'(x)$ et $f''(x)$ (la fonction dérivée première et la fonction dérivée seconde de la fonction $f(x)$) dans l'intervalle $-2.5 \leq x \leq 2.5$. Les deux graphes passent par l'origine du repère.



- א. Faites correspondre les graphes I et II avec les fonctions $f'(x)$ et $f''(x)$. Justifiez.
- ב. (1) Combien de points d'extremum locaux la fonction $f(x)$ admet-elle dans l'intervalle décrit sur le graphe ? Justifiez votre réponse.
(2) Combien de points d'inflexion la fonction $f(x)$ admet-elle dans l'intervalle décrit sur le graphe ? Justifiez votre réponse.
- ג. Pour quelle valeur de x située dans l'intervalle $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$, le coefficient directeur de la tangente au graphe de la fonction dérivée $f'(x)$ est minimal ?

Donnée : $f(x)$ est une fonction impaire.

- ד. Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.

Donnée : en son point maximal la valeur de la fonction $f(x)$ est t .

- ה. Exprimez en fonction de t , l'aire délimitée par le graphe II et par la partie négative de l'axe des abscisses (la partie hachurée sur le graphe).
- ו. Donnée : il existe des réels a , b et c de sorte que $f(x) = ax^5 + bx^3 + c$.
Déterminez c , ainsi que le rapport $\frac{a}{b}$.

7. Soit la fonction $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$.

א. Quel est le domaine de définition de la fonction $f(x)$?

Répondez aux paragraphes ב-ה pour l'intervalle $x \geq \frac{2}{7}$.

ב. Déterminez les coordonnées des points d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ avec l'axe des abscisses.

ג. Déterminez les coordonnées des points d'extremum de la fonction $f(x)$, puis déterminez leur type.

ד. La fonction $f(x)$ admet une asymptote horizontale. Déterminez l'équation de l'asymptote horizontale de la fonction $f(x)$.

ה. Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.

Répondez au paragraphe ו pour l'intervalle $x > 0$.

ו. Considérons les points d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ avec l'axe des abscisses.

Voici trois affirmations (i-iii). L'une d'entre elles est juste. Laquelle ? Justifiez.

i) Lorsque l'on tend vers $x = 0$, la distance entre deux points d'intersection contigus se réduit.

ii) La distance entre deux points d'intersection contigus reste constante.

iii) Lorsque l'on tend vers $x = 0$, la distance entre deux points d'intersection contigus augmente.

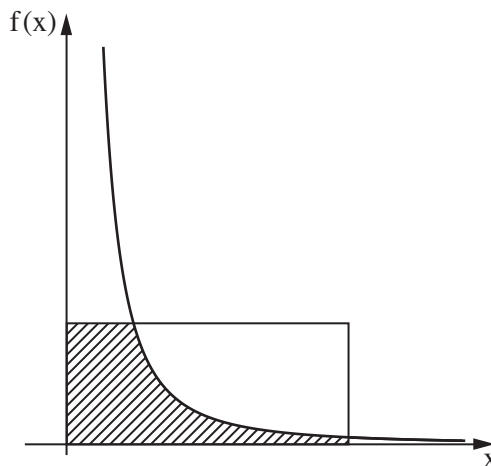
8. La figure ci-contre décrit le graphe de la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2}$ sur l'intervalle $x > 0$, et un rectangle dont deux des côtés se trouvent sur les axes, et qui est situé dans le premier quadrant.

Donnée : l'aire du rectangle est 4.

On note a la longueur du côté du rectangle qui se trouve sur l'axe des abscisses. Donnée : $a \geq \frac{1}{4}$.

א. Exprimez en fonction de a , l'aire délimitée par les axes, par les côtés du rectangle et par le graphe de la fonction $f(x)$ (l'aire hachurée sur la figure).

ב. Pour quelle valeur de a , l'aire que vous avez déterminée au paragraphe א est maximale ?



Bonne chance!

Tous droits réservés à l'État d'Israël.
Toute copie ou publication est interdite sans l'autorisation du
Ministère de l'Éducation.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך