

Matemáticas

5 unidades de estudio-Primer cuestionario

Instrucciones para el examen

א. Duración del examen: Tres horas y media.

ב. Estructura del cuestionario y clave de la evaluación:

Este cuestionario consta de tres partes.

Primera parte – Álgebra y Probabilidad

– 2×20 – 40 puntos

Segunda parte – Geometría y Trigonometría del plano

– 1×20 – 20 puntos

Tercera parte – Cálculo diferencial e integral de polinomios, de funciones radical, de funciones racionales y de funciones trigonométricas.

– 2×20 – 40 puntos

Total – 100 puntos

ג. Material auxiliar permitido:

(1) Una calculadora no gráfica. No se admite la posibilidad de programación con calculadoras programables. El uso de calculadora gráfica o de la posibilidad de programación de las calculadoras programables puede causar la anulación del examen.

(2) Hojas de fórmulas (adjuntas).

(3) Diccionario hebreo-lengua extranjera / lengua extranjera-hebreo.

ד. Instrucciones especiales:

(1) No copies la pregunta; indica solo su número.

(2) Inicia cada respuesta a una nueva pregunta en una nueva hoja. Indica en el cuadernillo las etapas de la resolución, aun en el caso en que realices tus cálculos utilizando la calculadora.

Explica detalladamente y de forma clara y ordenada, todas tus operaciones, incluidos los cálculos. La falta de detalles puede perjudicar la nota o causar la anulación del examen.

(3) Como borrador debes usar las hojas del cuadernillo del examen. El uso de otros borradores puede causar la anulación del examen.

מתמטיקה

5 יחידות לימוד - שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון

– אלגברה והסתברות – 2×20 – 40 נקודות

פרק שני

– גאומטריה וטריגונומטריה במישור

– 1×20 – 20 נקודות

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,

של פונקציות שורש, של פונקציות

רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

– 2×20 – 40 נקודות

סה"כ – 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות

התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון

גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום

לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

(3) מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את

שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים

בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל

חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת

הבחינה.

(3) לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה.

שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

Preguntas

¡Presta atención! Explica detalladamente y de forma clara y ordenada, todas tus operaciones, incluidos los cálculos. La falta de detalles puede perjudicar la nota o causar la anulación del examen.

Primera parte – Álgebra y Probabilidad (40 puntos)

Responde a dos de las preguntas 1 – 3 (cada pregunta – 20 puntos).

¡Presta atención! Si respondes a más de dos preguntas, solo las dos primeras respuestas de tu cuadernillo serán tenidas en cuenta para la corrección.

1. Dos ciclistas, Amir y Moshé, salieron a las 6:00 uno en dirección del otro.

Amir pedaleó a velocidad constante de la ciudad α a la ciudad β , y Moshé pedaleó a velocidad constante de la ciudad β a la ciudad α .

Amir y Moshé pasaron uno frente al otro y continuaron, cada uno de ellos, hacia su destino.

Amir llegó a la ciudad β dos horas después de haber pasado frente a Moshé, mientras que Moshé llegó la ciudad α 8 horas después de haber pasado frente a Amir.

α . ¿A qué hora pasaron Amir y Moshé uno frente al otro?

Indicaremos la velocidad del viaje de Amir con la letra V.

Exactamente cuando Amir y Moshé pasaron uno frente al otro, partió Yasmín, montando su motocicleta, de la ciudad α a la ciudad β , a velocidad constante.

Se sabe que Yasmín llegó a la ciudad β después que Amir, pero antes de que Moshé llegara a la ciudad α .

β . (1) Expresa por medio de V la distancia entre la ciudad α a la ciudad β .

(2) Expresa por medio de V el intervalo de velocidades posible de Yasmín.

2. a_n es una progresión geométrica infinita convergente de suma negativa.
 a_1 es el primer término de la progresión, y q es la razón de la progresión.
א. A continuación se hallan cuatro proposiciones (I-IV) . Sólo una de ellas es necesariamente verdadera. Señala su número y justifica tu respuesta.
- I) $q < 0$
II) $a_1 < 0$ y también $q < 0$
III) $a_1 < 0$
IV) $a_1 > 0$ o $q < 0$

Indicaremos con T la suma de los términos de los lugares impares de la progresión a_n ,
e indicaremos con R la suma de los términos de los lugares pares de la progresión a_n .
 p es un parámetro.

Dato: $T + p \cdot R = 0$.

- א. Expresa p por medio de q .

b_n es una progresión geométrica de razón p .

- א. ¿Será b_n una progresión convergente? Justifica tu respuesta.

- ב. Dato: p es negativo. Muestra que para todo n natural $a_{n+1} > a_n$
(Es decir, muestra que a_n es una progresión creciente).

3. En una gran ciudad se realizó un examen para todos los alumnos de la enseñanza secundaria.
El 37% de los alumnos que se presentaron a rendir el examen se ayudaron con sus
compañeros para prepararse para el examen. El $\frac{35}{37}$ de ellos superaron el examen con éxito.
El número de alumnos que no se ayudaron con sus compañeros y no superaron el examen con
éxito es 5 veces menor que el número de alumnos que se ayudaron con sus compañeros y
superaron el examen con éxito.
- א. Se eligió al azar un alumno que se presentó al examen, y resultó que no superó el examen
con éxito. ¿Cuál es la probabilidad de que se haya ayudado con sus compañeros?
- ב. Yael y Hadás se presentaron al examen. Se sabe que Yael se ayudó con sus compañeros
para prepararse para el examen, y que Hadás no se ayudó con sus compañeros para
prepararse para el examen. ¿Será la probabilidad de que Yael haya superado el examen
con éxito mayor que la probabilidad de que Hadás haya superado el examen con éxito?
Justifica tu respuesta.
- ג. Se eligieron al azar 6 alumnos que se presentaron a rendir el examen.
¿Cuál es la probabilidad de que exactamente un tercio de ellos no se haya ayudado con
sus compañeros y haya superado el examen con éxito?
- ד. Se eligió al azar un alumno que se presentó al examen. ¿Cuál es la probabilidad de que
cumpla por lo menos una de las dos proposiciones I -II:
- (I) El alumno se ayudó con sus compañeros.
(II) El alumno no ha superado el examen con éxito.

/Continúa en la página 4/

Segunda parte – Geometría y Trigonometría del plano (20 puntos)

Responde a una de las preguntas 4 – 5 .

¡Presta atención! Si respondes a más de una pregunta, solo la primera respuesta de tu cuadernillo será tenida en cuenta para su corrección.

4. ABCD es un rombo. E y F son los puntos medios de los lados AB y BC respectivamente. El punto K es el punto de intersección de las diagonales del rombo.

Desde el punto E se trazó una perpendicular a AB, que corta la prolongación de la diagonal BD en el punto G (ver dibujo).

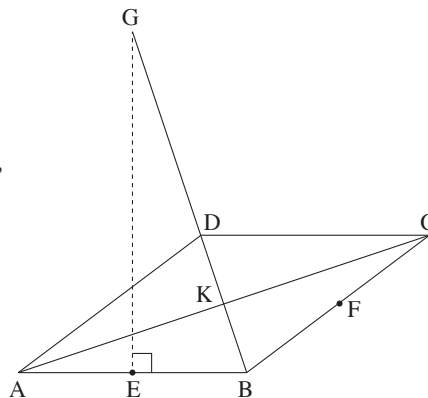
א. Demuestra que: el punto G es el centro de la circunferencia que circunscribe al triángulo ABC .

El segmento GF corta a la diagonal AC en el punto M, que es el centro de la circunferencia que circunscribe al triángulo BDC .

ב. Demuestra que los triángulos BKC, MFC, y BFG son semejantes.

Indicaremos con R el radio de la circunferencia

que circunscribe al triángulo ABC, e indicaremos con r el radio de la circunferencia que circunscribe al triángulo BDC.



א. (1) Demuestra que $\frac{MC}{GB} = \frac{MF}{CF}$ y que $\frac{MF}{CF} = \frac{BK}{CK}$.

(2) Muestra que la relación entre las diagonales del rombo es igual a $\frac{r}{R}$.

5. ABC es un triángulo rectángulo ($\angle ABC = 90^\circ$) .

M es un punto sobre la hipotenusa en el que $AM : MC = \sqrt{3} : 4$.

Dato: $\angle ABM = 30^\circ$, $BM = 8$.

א. (1) Indica: $MC = 4x$ y calcula la magnitud de los ángulos del triángulo ABC .

(2) Calcula los radios de las circunferencias que circunscriben a los triángulos ABM y CMB .

ב. Indicaremos los centros de las circunferencias que circunscriben a los triángulos ABM y CBM con O_1 y O_2 respectivamente.

(1) Explica por qué el cuadrado BO_1MO_2 es un deltoide.

(2) Calcula la longitud del segmento O_1O_2 .

Tercera parte – Cálculo diferencial e integral de polinomios, de funciones radical, de funciones racionales y de funciones trigonométricas (40 puntos)

Responde a dos de las preguntas 6 - 8 (cada pregunta – 20 puntos).

¡Presta atención! Si respondes a más de dos preguntas, solo las dos primeras respuestas en tu cuadernillo serán tenidas en cuenta para su corrección.

6. Se da la función $f(x) = \frac{ax - 1}{\sqrt{ax^2 - 2x + 1}}$. a es un parámetro.

Dato: La función $f(x)$ está definida para todo x .

א. Demuestra que $a > 1$

Responde al apartado ב. Si fuera necesario expresa por medio de a .

- ב. (1) Halla las coordenadas de los puntos de intersección del gráfico de la función $f(x)$ con los ejes.
- (2) Escribe las ecuaciones de las asíntotas de la función $f(x)$, que sean paralelas al eje x .
- (3) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x)$ (si los hubiere).
- (4) Traza un esbozo del gráfico de la función $f(x)$.

Se da $a = 3$

- א. Calcula el área limitada por el gráfico de la función $f(x)$, por el eje x , y por las rectas $x = \frac{2}{3}$ y $x = 2$.

- ב. $g(x)$ es una función continua definida para todo x .

Indicaremos con S el área limitada por el gráfico de la función $f(x)$, por el eje x , y por las rectas $x = \frac{1}{3}$ y $x = b$, ($b > \frac{1}{3}$).

Dato: El área limitada por el gráfico de la función $f(x)$, por el gráfico de la función $g(x)$ y por las rectas $x = \frac{1}{3}$ y $x = b$ es igual a $2S$ para todo b .

Expresa $g(x)$ por medio $f(x)$ en el intervalo $x > \frac{1}{3}$ (Escribe las dos posibilidades). No es necesario demostrar tu respuesta.

7. $f(x)$ es una función derivable, definida par todo x , tal que $f(x) \neq 0$ para todo x .
- א. Demuestra que si la función $f(x)$ crece en cierto intervalo, entonces la función $\frac{1}{f(x)}$ decrece en el mismo intervalo; y si la función $f(x)$ decrece en cierto intervalo, entonces la función $\frac{1}{f(x)}$ crece en el mismo intervalo.
- Se da la función $g(x) = \sin^2 x + \cos x + 2$, definida para todo x .
- ב. ¿Existe un x para el cual $g(x) = 0$? Justifica tu respuesta.
- ג. (1) ¿Es la función $g(x)$ una función par? Justifica tu respuesta.
(2) Muestra que para todo x se cumple: $g(x) = g(x + 2\pi)$.
(3) Halla las coordenadas de los puntos de extremo de la función $g(x)$ en el intervalo $0 \leq x \leq \pi$, y determina su tipo.
(4) Traza un esbozo del gráfico de la función $g(x)$ en el intervalo $-\pi \leq x \leq 3\pi$.
- Se da la función $h(x) = \frac{1}{\sin^2 x + \cos x + 2}$.

Responde al apartado 7. Puedes ayudarte con tus respuestas a los apartados anteriores.

7. (1) ¿Cuál es el dominio de definición de la función $h(x)$? Justifica tu respuesta.
(2) Traza un esbozo del gráfico de la función $h(x)$ en el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$ en el mismo sistema de ejes en el que trazaste el gráfico de la función $g(x)$.

8. ABCD es un cuadrado de 6 cm de lado.

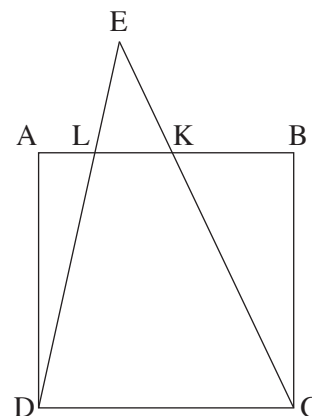
K y L son puntos sobre el lado AB.

Se sabe que las rectas CK y DL se cortan en el punto E, que se halla fuera del cuadrado ABCD (ver dibujo).

Indicaremos: $LK = x$.

- א. Expresa por medio de x la altura del triángulo KLE.
- ב. ¿Para qué valor de x la suma de las áreas de los triángulos BCK, ADL y KLE es mínima? Justifica tu respuesta.

En tu respuesta puedes dejar las raíces indicadas.



¡Buena Suerte!

Los derechos de autor están reservados al Estado de Israel.
Se prohíbe su copia o publicación salvo la autorización expresa
del Ministerio de Educación.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך