

Математика

5 единиц обучения – второй вопросник

Указания экзаменуемым

- а. Продолжительность экзамена: 2 часа 15 минут.
- б. Строение вопросника и ключ к оценке:
В этом вопроснике два раздела.
Раздел первый: аналитическая геометрия, векторы, тригонометрия в пространстве, комплексные числа –
 $2 \times 33\frac{1}{3} - 66\frac{2}{3}$ балла
Раздел второй: рост и затухание, степенные функции, показательные и логарифмические функции –
 $1 \times 33\frac{1}{3} - 33\frac{1}{3}$ балла
Всего – 100 баллов
- в. Разрешенный вспомогательный материал:
1. Калькулятор без графического дисплея. При работе с калькулятором, который предоставляет возможности программирования, запрещается использовать эти возможности. Использование калькулятора с графическим дисплеем или возможностей программирования может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.
2. Листы с формулами (прилагаются).
3. Словарь по выбору экзаменующегося.
- г. Особые указания:
1. Не переписывайте вопрос; обозначьте только его номер.
2. Начинайте ответ на каждый вопрос с новой страницы. Запишите в тетради этапы решения (также и в том случае, когда вычисления производились с помощью калькулятора). Объясните все свои действия, включая вычисления, подробно, в ясной и упорядоченной форме. Недостаточно подробная запись решения может привести к тому, что оценка за экзамен будет снижена или экзамен будет аннулирован.
3. Для черновых записей следует использовать экзаменационную тетрадь. Пользование другими черновиками может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

Желаем успеха!

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון שני

הוראות לנבחן

- א. משך הבחינה: שתיים ורבע.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:
בשאלון זה שני פרקים.
פרק ראשון: גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים
 $2 \times 33\frac{1}{3} - 66\frac{2}{3}$ נקודות
פרק שני: גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות
 $1 \times 33\frac{1}{3} - 33\frac{1}{3}$ נקודות
סה"כ – 100 נקודות
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).
3. מילון לפי בחירת הנבחן.
- ד. הוראות מיוחדות:
1. אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
2. התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
3. לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה. שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

בהצלחה!

Вопросы

Обратите внимание! Объясняйте все ваши действия, включая вычисления, подробным и ясным образом.

Недостаточная детализация может снизить вашу оценку или привести к аннулированию экзамена.

Раздел первый – аналитическая геометрия, векторы, тригонометрия в пространстве, комплексные числа ($66\frac{2}{3}$ балла)

Ответьте на два из вопросов 1-3 (за каждый вопрос – $33\frac{1}{3}$ балла).

Обратите внимание! Если вы ответите более чем на два вопроса, будут проверены только первые два из ответов в вашей тетради.

1. Даны точки $A(-3a, 0)$ и $B(3, 0)$. $a > 0$ – параметр.

(а) Выразите при помощи a геометрическое место всех точек P , для которых $\frac{PA}{PB} = 1$.

(б) Покажите, что геометрическое место всех точек Q , для которых $\frac{QA}{QB} = 2$, является окружностью, и выразите при помощи a координаты центра этой окружности и ее радиус.

(в) Рассмотрим множество всех окружностей, которые касаются геометрического места, найденного вами в пункте (а), и проходят через центр окружности, найденный вами в пункте (б).

Дано, что центры этих окружностей являются геометрическим местом, проходящим через начало координат.

(1) Идентифицируйте это геометрическое место.

(2) Найдите a и напишите уравнение этого геометрического места.

2. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A' B' C' D'$.

Ребра DA , DC и DD' лежат на осях x , y и z соответственно, как показано на чертеже.

Дано: $DA = 4$, $AA' = 3$.

Обозначим: $AB = a$. $a > 0$ – параметр.

Точки P , N , L и K – точки на ребрах прямоугольного параллелепипеда

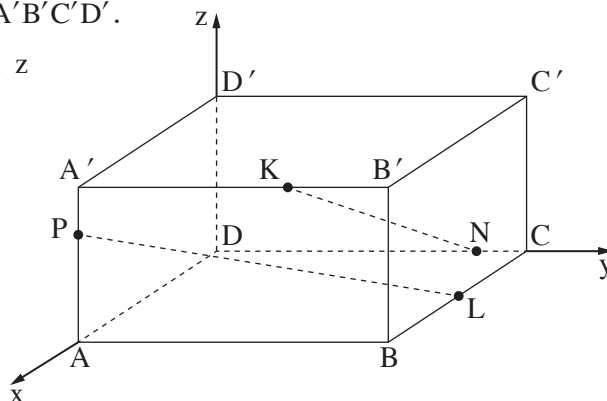
AA' , DC , BC и $A'B'$ соответственно,

для которых выполняется: $AP = 2PA'$,

$N(0, 5, 0)$,

L – середина ребра BC ,

$\overrightarrow{A'K} = \frac{4}{5}\overrightarrow{DN}$



(*) Найдите уравнение плоскости PNK .

(*) (1) Найдите параметрическое представление прямой NK и прямой PL .

Если необходимо, выразите при помощи a .

(2) Объясните, почему прямые NK и PL являются скрещивающимися прямыми.

(*) (1) При каких значениях a $\angle PC'C = 82.1^\circ$? В своем ответе оставьте две цифры после десятичного знака.

(2) Существует ли a , для которого $\angle PC'C = 90^\circ$? Обоснуйте свой ответ.

3. z_1 и z_2 – два комплексных числа, для которых: $|z_1| = |z_2| = r$, $\arg z_1 + \arg z_2 = 90^\circ$.

(*) Докажите, что произведение $z_1 \cdot z_2$ является чисто мнимым числом, и представьте его при помощи r .

Точки A , B и C гауссовой плоскости представляют соответственно комплексные числа z_1 , z_2 и z_3

Дано: точки A , B и C не находятся на одной прямой, и точка C находится на прямой $y = x$.

(*) Объясните, почему треугольник ABC – равнобедренный.

Точка D гауссовой плоскости соответствует комплексному числу $z_3 \cdot (z_1 \cdot z_2)^2$.

Дано: $z_1 + z_2 = 7 + 7i$

$z_1 - z_2 = 1 - i$

$(z_3)^2 = 2i$

(*) (1) Найдите координаты точек C и D (найдите две возможности).

(2) Вычислите площадь четырехугольника $BDAC$ для точки C , находящейся в первом квадранте.

/продолжение на странице 4/

Раздел второй – рост и затухание, степенные функции, показательные и логарифмические функции ($33\frac{1}{3}$ балла)

Ответьте на один из вопросов 4-5 .

Обратите внимание! Если вы ответите более чем на один вопрос, будет проверен только первый из ответов в вашей тетради.

4. Дано семейство функций $f(x) = e^{2mx} - e^{mx}$. $m > 0$ – параметр.

Ответьте на вопросы пункта (а). При необходимости выразите ответы при помощи m .

- (а) (1) Какова область определения функции $f(x)$?
- (2) Найдите координаты точек пересечения графика функции $f(x)$ с осями координат (если таковые существуют).
- (3) Найдите уравнения асимптот функции $f(x)$, перпендикулярных осям координат. (если таковые существуют).
- (4) Найдите координаты точек экстремума функции $f(x)$ (если таковые существуют) и определите их тип.
- (б) Начертите в одной системе координат графики функций $f(x)$ для $m = 1$ и для $m = 2$ (известно, что два этих графика пересекаются в точности в двух точках). Укажите, какое значение m соответствует каждому графику.

Прямая $y = k$ является касательной к графику функции $f(x)$.

- (а) (1) Выразите при помощи m площадь фигуры, заключенной между графиком функции $f(x)$, осью y и прямой $y = k$.

Для любого m обозначим площадь фигуры, описанной в подпункте (а)-(1), через S_m (S_1 – это площадь для $m = 1$).

- (2) Покажите, что для любого m выполняется: $S_m = \frac{S_1}{m}$.

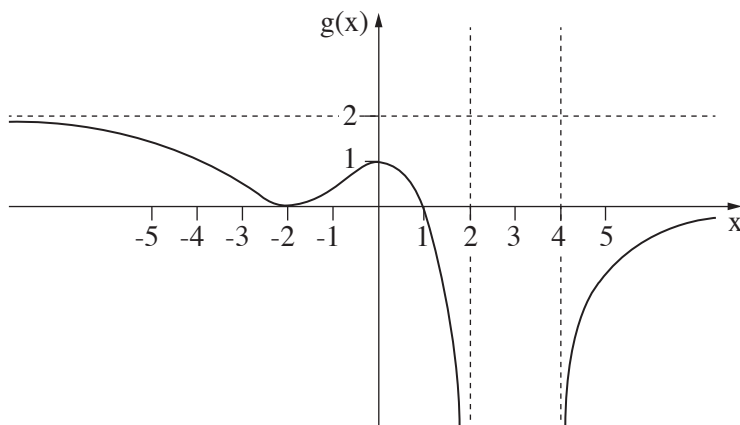
5. Дано: $f(x)$ – непрерывная и дифференцируемая функция для любого x . Обозначим $g(x) = \ln(f(x))$.

Функция $g(x)$ определена для любого $x > 4$ и для любого $x < 2$, и только там.

В области $2 \leq x \leq 4$ $f'(x) = 0$ только для $x = 3$.

На чертеже ниже изображен график функции $g(x)$.

Функция $g(x)$ обнуляется только в точках, для которых $x = 1$ и $x = -2$.



- (א) Найдите $f(-2)$, $f(0)$ и $f(1)$.
- (ב) Каковы области положительности и каковы области отрицательности функции $f(x)$? Обоснуйте свой ответ.
- (ג) Каковы координаты точек пересечения графика функции $f(x)$ с каждой из осей координат? Обоснуйте свой ответ.
- (ד) У функции $f(x)$ есть две горизонтальные асимптоты. Напишите их уравнения.
- (ה) Каковы области возрастания и каковы области убывания функции $f(x)$? Обоснуйте свой ответ.
- (ו) Начертите схематический график функции $f(x)$.
- (ז) Объясните, почему $\int_{-2}^1 f(x) dx > 3$.

Желаем успеха!

Авторские права принадлежат Государству Израиль.
Копировать или публиковать можно только
с разрешения Министерства просвещения.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.
אין להעתיק או לפרסם
אלא ברשות משרד החינוך.