

מ ת מ ט י ק ה  
5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

Математика  
5 единиц обучения – первый вопросник

הוראות לנבחן

Указания экзаменующимся

- א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.  
ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:  
בשאלון זה שלושה פרקים.  
פרק ראשון — אלגברה והסתברות  
 $20 \times 2$  — 40 נקודות  
פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור  
 $20 \times 1$  — 20 נקודות  
פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות  
 $20 \times 2$  — 40 נקודות  
סה"כ — 100 נקודות
- א. חומר עזר מותר בשימוש:  
1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.  
2. דפי נוסחאות (מצורפים).  
3. מילון לפי בחירת הנבחן.
- ד. הוראות מיוחדות:  
1. אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.  
2. התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.  
3. לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה. שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

в. Разрешенный вспомогательный материал:

1. Калькулятор без графического дисплея. При работе с калькулятором, который предоставляет возможности программирования, запрещается использовать эти возможности. Использование калькулятора с графическим дисплеем или возможностей программирования может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.
2. Листы с формулами (прилагаются).
3. Словарь по выбору экзаменующегося.
- г. Особые указания:
1. Не переписывайте вопрос; обозначьте его номер.
2. Начинайте ответ на каждый вопрос с новой страницы. Запишите в тетради этапы решения (также и в том случае, когда вычисления производились с помощью калькулятора). Объясните все свои действия, включая вычисления, подробно, в ясной и упорядоченной форме. Недостаточно подробная запись решения может привести к тому, что оценка за экзамен будет снижена или экзамен будет аннулирован.
3. Для черновых записей следует использовать экзаменационную тетрадь. Пользование другими черновиками может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

Желаем успеха!

ב ה צ ל ח ה

### Вопросы

**Обратите внимание!** Объясняйте все ваши действия, включая вычисления, подробным и ясным образом.

**Недостаточная детализация может снизить вашу оценку или привести к аннулированию экзамена.**

### Раздел первый – алгебра и теория вероятности

(40 баллов)

Ответьте на два из вопросов 1-3 (за каждый вопрос – 20 баллов).

**Обратите внимание!** Если вы ответите более чем на два вопроса, будут проверены только первые два из ответов в вашей тетради.

1. Два велосипедиста, Амир и Моше, выехали в 6:00 навстречу друг другу.

Амир ехал с постоянной скоростью из города  $\kappa$  в город  $\tau$ , а Моше ехал с постоянной скоростью из города  $\tau$  в город  $\kappa$ .

Амир и Моше проехали друг мимо друга и каждый из них продолжил движение в своем направлении. Амир прибыл в город  $\tau$  через два часа после того, как проехал мимо Моше, а Моше прибыл в город  $\kappa$  через 8 часов после того, как проехал мимо Амира.

( $\kappa$ ) В котором часу Амир и Моше проехали друг мимо друга?

Обозначим скорость движения Амира буквой  $V$ .

В точности тогда, когда Амир и Моше проехали друг мимо друга, Ясмин выехала на мотоцикле из города  $\kappa$  в город  $\tau$  с постоянной скоростью. Дано, что Ясмин прибыла в город  $\tau$  после Амира, но до того, как Моше прибыл в город  $\kappa$ .

( $\tau$ ) (1) Выразите при помощи  $V$  расстояние между городом  $\kappa$  и городом  $\tau$ .

(2) Выразите при помощи  $V$  возможный интервал скоростей Ясмин.

2.  $a_n$  – сходящаяся [מתכנסת] бесконечная геометрическая прогрессия, сумма которой отрицательна.

$a_1$  – первый член этой прогрессии, а  $q$  – знаменатель этой прогрессии.

- (**א**) Ниже приведено четыре утверждения (I-IV). Только одно из них абсолютно верно. Укажите его номер и обоснуйте свой выбор.

I)  $q < 0$

II)  $a_1 < 0$  и также  $q < 0$

III)  $a_1 < 0$

IV)  $a_1 > 0$  или  $q < 0$

Обозначим через  $T$  сумму членов, находящихся на нечетных местах в прогрессии  $a_n$ , и обозначим через  $R$  сумму членов, находящихся на четных местах в прогрессии  $a_n$ .  $p$  – параметр.

Дано:  $T + p \cdot R = 0$

- (**ב**) Выразите  $p$  при помощи  $q$ .

$b_n$  – геометрическая прогрессия, знаменатель которой равен  $p$ .

- (**ג**) Является ли  $b_n$  сходящейся прогрессией? Обоснуйте свой ответ.

- (**ד**) Дано:  $p$  – отрицательный. Покажите, что для любого натурального  $n$   $a_{n+1} > a_n$  (т. е. покажите, что прогрессия  $a_n$  – это возрастающая прогрессия).

3. В большом городе проводится экзамен для всех учеников старших классов.

37% учеников, сдававших экзамен, получили помощь своих товарищей при подготовке к экзамену.  $\frac{35}{37}$  из них успешно сдали этот экзамен.

Число учеников, которым не помогали товарищи и которые не сдали этот экзамен, в 5 раз меньше числа учеников, которым помогали товарищи и которые успешно сдали этот экзамен.

- (**א**) Случайным образом выбрали ученика, который сдавал этот экзамен и, как выяснилось, не сдал экзамен. Какова вероятность того, что ему помогал товарищ?

- (**ב**) Яэль и Адам сдавали этот экзамен. Известно, что Яэль получила помощь подруги при подготовке к экзамену, а Адам не получила помощи при подготовке к экзамену. Выше ли вероятность того, что Яэль успешно сдала экзамен, вероятности того, что Адам успешно сдал экзамен? Обоснуйте свой ответ.

- (**ג**) Случайным образом выбрали 6 учеников, которые сдавали экзамен. Какова вероятность, что в точности треть из них не получили помощи товарищей и успешно сдали экзамен?

- (**ד**) Случайным образом выбрали ученика, который сдавал этот экзамен. Какова вероятность того, что для него верно по меньшей мере одно из двух утверждений I-II?

I) Этому ученику помогал товарищ.

II) Этот ученик не сдал экзамен.

## Раздел второй – геометрия и тригонометрия на плоскости (20 баллов)

Ответьте на один из вопросов 4-5.

**Обратите внимание!** Если вы ответите более чем на один вопрос, будет проверен только первый ответ в вашей тетради.

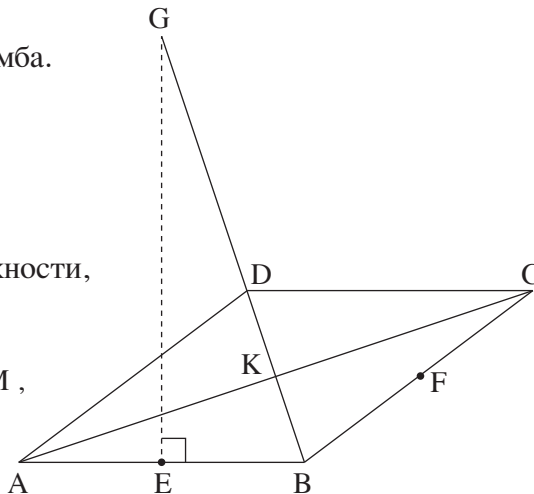
4. ABCD – ромб. E и F – середины сторон AB и BC соответственно.

Точка K – точка пересечения диагоналей этого ромба.

Из точки E провели перпендикуляр к AB, пересекающий продолжение диагонали BD в точке G (смотрите чертеж).

- (\*) Докажите: точка G является центром окружности, описанной около треугольника ABC.

Отрезок GF пересекает диагональ AC в точке M, которая является центром окружности, описанной около треугольника BDC.



- (2) Докажите, что треугольники MFC, BKC и BFG подобны [דומים] друг другу.

Обозначим через R радиус окружности, описанной около треугольника ABC, и обозначим через r радиус окружности, описанной около треугольника BDC.

- (\*) (1) Докажите, что  $\frac{MC}{GB} = \frac{MF}{CF}$  и что  $\frac{MF}{CF} = \frac{BK}{CK}$ .

- (2) Докажите, что соотношение между диагоналями данного ромба равно  $\frac{r}{R}$ .

5. ABC – прямоугольный треугольник ( $\angle ABC = 90^\circ$ ).

M – такая точка на гипотенузе, что  $AM : MC = \sqrt{3} : 4$ .

Дано:  $\angle ABM = 30^\circ$ ,  $BM = 8$ .

- (\*) (1) Обозначьте:  $MC = 4x$  и вычислите углы треугольника ABC.

- (2) Вычислите радиусы окружностей, описанных около треугольников ABM и CBM.

- (2) Обозначим центры окружностей, описанных около треугольников ABM и CBM, через  $O_1$  и  $O_2$  соответственно.

- (1) Объясните, почему четырехугольник  $BO_1MO_2$  является дельтоидом [דלתון].

- (2) Вычислите длину отрезка  $O_1O_2$ .

**Раздел третий – дифференциальное и интегральное исчисление полиномов, функций, содержащих корни, рациональных функций и тригонометрических функций (40 баллов)**

Ответьте на два из вопросов 6-8 (за каждый вопрос – 20 баллов).

**Обратите внимание!** Если вы ответите более чем на два вопроса, будут проверены только первые два из ответов в вашей тетради.

6. Дана функция  $f(x) = \frac{ax - 1}{\sqrt{ax^2 - 2x + 1}}$ .  $a$  – параметр.

Дано: функция  $f(x)$  определена для любого  $x$ .

(**х**) Докажите:  $a > 1$ .

Ответьте на вопросы пункта (**з**). Если необходимо, выразите ответ при помощи  $a$ .

- (**з**) (1) Найдите координаты точек пересечения графика функции  $f(x)$  с осями координат.  
(2) Напишите уравнения асимптот функции  $f(x)$ , параллельных оси  $x$ .  
(3) Найдите области возрастания и убывания функции  $f(x)$  (если таковые существуют).  
(4) Начертите схематический график функции  $f(x)$ .

Дано:  $a = 3$ .

- (**а**) Вычислите площадь фигуры, заключенной между графиком функции  $f(x)$ , осью  $x$ , прямыми  $x = \frac{2}{3}$  и  $x = 2$ .  
(**т**)  $g(x)$  – непрерывная функция, определенная для любого  $x$ .

Обозначим через  $S$  площадь фигуры, заключенной между графиком функции  $f(x)$ , осью  $x$  и прямыми  $x = \frac{1}{3}$  и  $x = b$  ( $b > \frac{1}{3}$ ).

Дано: площадь фигуры, заключенной между графиком функции  $f(x)$ , графиком функции  $g(x)$  и прямыми  $x = \frac{1}{3}$  и  $x = b$ , равна  $2S$  для любого  $b$ .

Выразите  $g(x)$  при помощи  $f(x)$  в области  $x > \frac{1}{3}$  (напишите две возможности).

Нет необходимости доказывать ваш ответ.

7.  $f(x)$  – дифференцируемая функция, определенная для любого  $x$ ,  
 так что  $f(x) \neq 0$  для любого  $x$ .

(а) Докажите, что если функция  $f(x)$  возрастает на определенном отрезке, то функция  $\frac{1}{f(x)}$  убывает на этом отрезке, и если функция  $f(x)$  убывает на определенном отрезке, то функция  $\frac{1}{f(x)}$  возрастает на этом отрезке.

Дана функция  $g(x) = \sin^2 x + \cos x + 2$ , определенная для любого  $x$ .

(а) Существует ли  $x$ , для которого  $g(x) = 0$ ? Обоснуйте свой ответ.

(а) (1) Является ли функция  $g(x)$  четной? Обоснуйте свой ответ.

(2) Покажите, что для любого  $x$  выполняется:  $g(x) = g(x + 2\pi)$ .

(3) Найдите координаты точек экстремума функции  $g(x)$  в области  $0 \leq x \leq \pi$  и определите их тип.

(4) Начертите схематический график функции  $g(x)$  в области  $-\pi \leq x \leq 3\pi$ .

Дана функция  $h(x) = \frac{1}{\sin^2 x + \cos x + 2}$ .

Ответьте на вопросы пункта (7). Вы можете воспользоваться своими ответами на вопросы предыдущих пунктов.

(7) (1) Какова область определения функции  $h(x)$ ? Обоснуйте свой ответ.

(2) Начертите схематический график функции  $h(x)$  в области  $-\pi \leq x \leq \pi$  в той же системе координат, в которой вы начертили схематический график функции  $g(x)$ .

8. ABCD – квадрат, длина стороны которого равна 6 см.

K и L – точки на стороне AB.

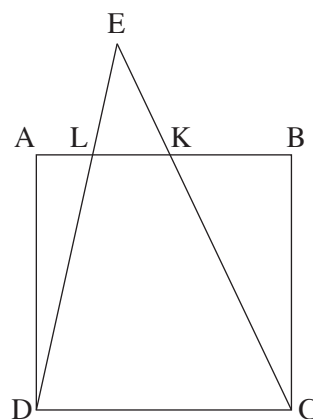
Дано, что прямые CK и DL пересекаются в точке E, находящейся вне квадрата ABCD (смотрите чертеж).

Обозначим:  $LK = x$ .

(а) Выразите при помощи  $x$  высоту треугольника KLE.

(а) При каком значении  $x$  сумма площадей треугольников BCK, ADL и KLE является минимальной? Обоснуйте свой ответ.

В ответе можно оставить знак корня.



**Желаем успеха!**

Авторские права принадлежат Государству Израиль.  
 Копировать или публиковать можно только с разрешения Министерства просвещения.

**בהצלחה!**

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.  
 אין להעתיק או לפרסם  
 אלא ברשות משרד החינוך.