

Mathématiques
5 unités d'étude - deuxième questionnaire

Instructions au candidat

- א. Durée de l'examen : deux heures et quart.
- ב. Structure du questionnaire et barème de notation :
Ce questionnaire comporte deux parties.
Première partie — Géométrie analytique, vecteurs, trigonométrie dans l'espace, nombres complexes.
 $2 \times 33 \frac{1}{3} - 66 \frac{2}{3}$ points
Deuxième partie — Croissance et décroissance, fonctions puissance, fonctions exponentielles et logarithmiques.
 $1 \times 33 \frac{1}{3} - 33 \frac{1}{3}$ points
Total — 100 points
- ג. Matériel auxiliaire autorisé :
(1) Calculatrice non graphique. Il est interdit d'utiliser les options de programmation d'une calculatrice programmable. L'utilisation d'une calculatrice graphique ou des options de programmation d'une calculatrice peut entraîner votre disqualification.
(2) Formulaires (joint au sujet).
(3) Dictionnaire hébreu-langue étrangère / langue étrangère-hébreu.
- ד. Instructions supplémentaires :
(1) Ne recopiez pas la question, indiquez seulement son numéro.
(2) Commencez chaque question sur une nouvelle page. Écrivez dans le cahier d'examen les étapes de la résolution, même lorsque les calculs se font à l'aide de la calculatrice. Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, en détail et de façon claire et ordonnée. Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.
(3) Pour vos brouillons, utilisez le cahier d'examen. L'utilisation d'autres feuilles de brouillon peut entraîner votre disqualification.

Bonne chance!

מתמטיקה
5 יחידות לימוד - שאלון שני

הוראות לנבחן

- א. משך הבחינה: שתיים ורבע.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:
בשאלון זה שני פרקים.
פרק ראשון — גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים
 $2 \times 33 \frac{1}{3} - 66 \frac{2}{3}$ נקודות
פרק שני — גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות
 $1 \times 33 \frac{1}{3} - 33 \frac{1}{3}$ נקודות
סה"כ — 100 נקודות
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
(2) דפי נוסחאות (מצורפים).
(3) מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.
- ד. הוראות מיוחדות:
(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
(3) לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה.
שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

בהצלחה!

Questions

Attention ! Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, de manière détaillée et claire.
Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Première partie - Géométrie analytique, vecteurs, trigonométrie dans l'espace et nombres complexes ($66\frac{2}{3}$ points)

Répondez à deux des questions 1-3 ($33\frac{1}{3}$ points par question).

Attention ! Si vous répondez à plus de deux questions, seules les deux premières réponses de votre copie seront corrigées.

1. Soit les points $A(-3a, 0)$ et $B(3, 0)$. $a > 0$ est un paramètre.

- א. Exprimez en fonction de a , le lieu géométrique de tous les points P vérifiant $\frac{PA}{PB} = 1$.
- ב. Montrez que le lieu géométrique de tous les points Q vérifiant $\frac{QA}{QB} = 2$ est un cercle, puis exprimez les coordonnées du centre de ce cercle ainsi que son rayon en fonction de a .
- ג. Considérons l'ensemble des cercles tangents au lieu géométrique que vous avez déterminé à l'article א et qui passent par le centre du cercle que vous avez déterminé à l'article ב.

Il est donné que les centres de ces cercles constituent un lieu géométrique passant par l'origine du repère.

(1) Identifiez ce lieu géométrique.

(2) Déterminez a , puis donnez l'équation de ce lieu géométrique.

2. La figure ci-contre représente le pavé ABCDA'B'C'D'.

Les arêtes DA, DC et DD' reposent respectivement sur les axes des abscisses, des ordonnées et de cotes, tel que cela est représenté dans la figure.

Données : DA = 4, AA' = 3.

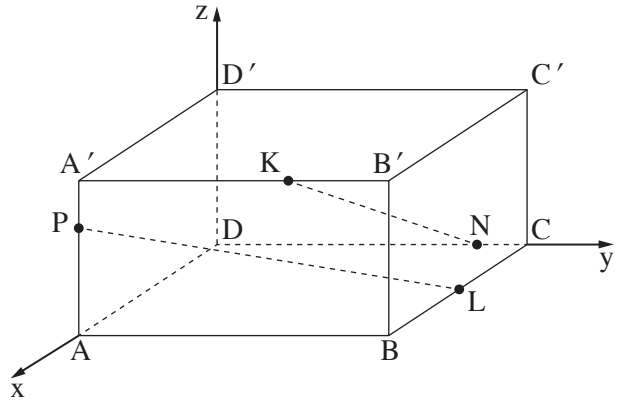
On note : AB = a. a > 0 est un paramètre.

Les points P, N, L et K se trouvent respectivement sur les arêtes AA', DC, BC et A'B' du pavé, de sorte que se vérifient : AP = 2PA',

N(0, 5, 0),

L est le milieu de l'arête BC,

$\overrightarrow{A'K} = \frac{4}{5}\overrightarrow{DN}$.



⌘. Déterminez l'équation du plan PNK.

⌘. (1) Déterminez la représentation paramétrique de la droite NK et de la droite PL.

Exprimez votre réponse en fonction de a si nécessaire.

(2) Expliquez pourquoi les droites NK et PL sont des droites non-coplanaires [מצטלבים].

⌘. (1) Pour quelle valeur de a $\angle PC'C = 82.1^\circ$? Donnez une réponse avec deux chiffres après la virgule.

(2) Existe-t-il un a pour lequel $\angle PC'C = 90^\circ$? Justifiez.

3. z_1 et z_2 sont deux nombres complexes vérifiant : $|z_1| = |z_2| = r$, $\arg z_1 + \arg z_2 = 90^\circ$.

⌘. Démontrez que le résultat du produit $z_1 \cdot z_2$ est un nombre imaginaire pur, puis exprimez-le en fonction de r.

Les points A, B et C du plan de Gauss représentent respectivement les nombres complexes z_1 , z_2 et z_3 .

Données : les points A, B et C ne se trouvent pas sur une même droite, et le point C se trouve sur la droite $y = x$.

⌘. Expliquez pourquoi le triangle ABC est un triangle isocèle.

Le point D du plan de Gauss correspond au nombre complexe $z_3 \cdot (z_1 \cdot z_2)^2$.

Données : $z_1 + z_2 = 7 + 7i$

$z_1 - z_2 = 1 - i$

$(z_3)^2 = 2i$

⌘. (1) Déterminez les coordonnées des points C et D (déterminez les deux possibilités).

(2) Calculez l'aire du quadrilatère BDAC pour le point C situé dans le premier quadrant.

Deuxième partie – Croissance et décroissance, fonctions puissance, fonctions exponentielles et logarithmiques ($33\frac{1}{3}$ points)

Répondez à l'une des questions 4-5.

Attention ! Si vous répondez à plus d'une question, seule la première réponse de votre copie sera corrigée.

4. Soit la famille de fonctions $f(x) = e^{2mx} - e^{mx}$. $m > 0$ est un paramètre.

Répondez à l'article $\aleph$. Exprimez vos réponses en fonction de m si cela est nécessaire.

- $\aleph$. (1) Déterminez le domaine de définition de la fonction $f(x)$.
- (2) Déterminez les coordonnées des points d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ avec les axes (s'il en existe).
- (3) Déterminez les équations des asymptotes de la fonction $f(x)$, perpendiculaires aux axes (s'il en existe).
- (4) Déterminez les coordonnées des points d'extremum de la fonction $f(x)$ (s'il en existe), puis déterminez leur type.
- $\beth$. Tracez dans un même repère les graphes des fonctions $f(x)$ pour $m = 1$ et pour $m = 2$ (on sait que les deux graphes se coupent en deux points exactement). Faites correspondre les graphes que vous avez tracés avec les valeurs de m données.

La droite $y = k$ est tangente au graphe de la fonction $f(x)$.

- $\aleph$. (1) Exprimez en fonction de m l'aire délimitée par le graphe de la fonction $f(x)$, par l'axe des ordonnées et par la droite $y = k$.

Pour tout m , on note S_m l'aire décrite au sous-article $\aleph(1)$ (S_1 est l'aire pour $m = 1$).

- (2) Montrez que tout m vérifie : $S_m = \frac{S_1}{m}$.

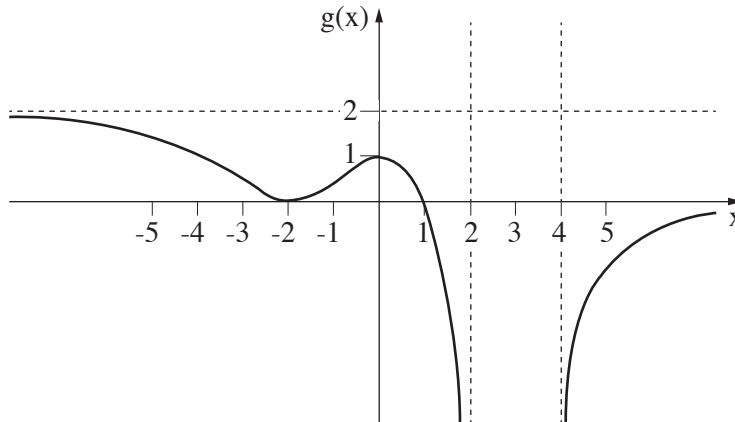
5. Donnée : $f(x)$ est une fonction continue et dérivable pour tout x . On note $g(x) = \ln(f(x))$.

La fonction $g(x)$ est définie pour tout $x > 4$ et pour tout $x < 2$, et uniquement sur cet intervalle.

Sur l'intervalle $2 \leq x \leq 4$, $f'(x) = 0$ uniquement pour $x = 3$.

La figure ci-dessous représente le graphe de la fonction $g(x)$.

La fonction $g(x)$ s'annule uniquement aux points où $x = 1$ et $x = -2$.



- א. Déterminez $f(-2)$, $f(0)$ et $f(1)$.
- ב. Quels sont les intervalles sur lesquels la fonction $f(x)$ est positive et les intervalles sur lesquels elle est négative ? Justifiez.
- ג. Quels sont les coordonnées des points d'intersection de la fonction $f(x)$ avec chacun des axes ? Justifiez.
- ד. La fonction $f(x)$ admet deux asymptotes horizontales. Donnez leur équation.
- ה. Quels sont les intervalles de croissance et les intervalles de décroissance de la fonction $f(x)$? Justifiez.
- ו. Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.
- ז. Expliquez pourquoi : $\int_{-2}^1 f(x) dx > 3$.

Bonne chance!

Tous droits réservés à l'État d'Israël.
Toute copie ou publication est interdite sans l'autorisation du
Ministère de l'Éducation.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך