

Mathématiques

5 unités d'étude - premier questionnaire

Instructions au candidat

א. Durée de l'examen : trois heures et demie.

ב. Structure du questionnaire et barème de notation :

Ce questionnaire comporte trois parties.

Première partie — Algèbre et probabilités
 $2 \times 20 = 40$ points

Deuxième partie — Géométrie et trigonométrie planes
 $1 \times 20 = 20$ points

Troisième partie — Calcul différentiel et intégral
de polynômes, de fonctions racines,
de fonctions rationnelles
et de fonctions trigonométriques
 $2 \times 20 = 40$ points
Total — 100 points

ג. Matériel auxiliaire autorisé :

- (1) Calculatrice non graphique. Il est interdit d'utiliser les options de programmation d'une calculatrice programmable. L'utilisation d'une calculatrice graphique ou des options de programmation d'une calculatrice peut entraîner votre disqualification.
- (2) Formulaires (jointes au sujet).
- (3) Dictionnaire hébreu-langue étrangère / langue étrangère-hébreu.

ד. Instructions supplémentaires :

- (1) Ne recopiez pas la question, indiquez seulement son numéro.
- (2) Commencez chaque question sur une nouvelle page. Écrivez dans le cahier d'examen les étapes de la résolution, même lorsque les calculs se font à l'aide de la calculatrice. Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, en détail et de façon claire et ordonnée. Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.
- (3) Pour vos brouillons, utilisez le cahier d'examen. L'utilisation d'autres feuilles de brouillon peut entraîner votre disqualification.

Bonne chance!

מתמטיקה

5 יחידות לימוד - שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות

$20 \times 2 = 40$ נקודות

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור

$20 \times 1 = 20$ נקודות

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

של פולינומים, של פונקציות שורש,

של פונקציות רציונליות

ושל פונקציות טריגונומטריות

$20 \times 2 = 40$ נקודות

סה"כ — 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).
- (3) מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
- (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
- (3) לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה. שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

בהצלחה!

Questions

Attention ! Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, de manière détaillée et claire.
Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Première partie – Algèbre et probabilités (40 points)

Répondez à deux des questions 1-3 (20 points par question).

Attention : Si vous répondez à plus de deux questions, seules les deux premières réponses de votre copie seront corrigées.

1. Deux cyclistes, Amir et Moshé sont sortis à 6:00 l'un en direction de l'autre.

Amir a roulé à une vitesse constante de la ville α vers la ville β et Moshé a roulé à une vitesse constante de la ville β vers la ville α .

Amir et Moshé se sont croisés et ont chacun continué à rouler vers leur destination.

Amir est arrivé à la ville β deux heures après avoir croisé Moshé, tandis que Moshé est arrivé à la ville α 8 heures après avoir croisé Amir.

α . À quelle heure Amir et Moshé se sont-ils croisés ?

On note par la lettre V la vitesse d'Amir.

Au moment précis où Amir et Moshé se sont croisés, Yasmine est sortie à moto de la ville α vers la ville β à une vitesse constante.

Il est donné que Yasmine est arrivée à la ville β après Amir, mais avant que Moshé soit arrivé à la ville α .

β . (1) Exprimez la distance entre la ville α et la ville β en fonction de V .

(2) Exprimez l'intervalle possible des vitesses de Yasmine en fonction de V .

2. a_n est une suite géométrique infinie convergente dont la somme est négative.
 a_1 est le premier terme de la suite et q est la raison de la suite.
- א. Voici quatre affirmations (I-IV). Seule l'une d'entre elles est nécessairement vraie.
Indiquez son numéro, puis justifiez.
- I) $q < 0$
II) $a_1 < 0$ et également $q < 0$
III) $a_1 < 0$
IV) $a_1 > 0$ ou bien $q < 0$

On note T la somme des termes situés aux emplacements impairs de la suite a_n ,
et R la somme des termes situés aux emplacements pairs de la suite a_n .

p est un paramètre.

Donnée : $T + p \cdot R = 0$.

- א. Exprimez p en fonction de q .

b_n est une suite géométrique de raison p .

- א. b_n est-elle une suite convergente ? Justifiez.

- ב. Donnée : p est négatif. Montrez que pour tout n entier naturel, $a_{n+1} > a_n$
(autrement dit, montrez que la suite a_n est une suite croissante).

3. Dans une grande ville, on a fait passer un examen à l'ensemble des lycéens.
37% des élèves qui se sont présentés à cet examen se sont fait aider par leurs amis pour se préparer à l'examen. $\frac{35}{37}$ d'entre eux ont réussi l'examen.
Le nombre d'élèves qui ne se sont pas fait aider par leurs amis et qui n'ont pas réussi l'examen est 5 fois plus petit que le nombre d'élèves qui se sont fait aider par leurs amis et qui ont réussi l'examen.
- א. On a choisi au hasard un élève qui s'est présenté à l'examen, et il s'avère qu'il ne l'a pas réussi. Quelle est la probabilité qu'il se soit fait aider par ses amis ?
- ב. Yaël et Hadas se sont présentées à l'examen. On sait que Yaël s'est fait aider par ses amis pour se préparer à l'examen et que Hadas ne s'est pas fait aider par ses amis pour se préparer à l'examen. La probabilité que Yaël ait réussi l'examen est-elle plus grande que la probabilité que Hadas ait réussi l'examen ? Justifiez.
- א. On a choisi au hasard 6 élèves qui se sont présentés à l'examen.
Quelle est la probabilité que précisément un tiers d'entre eux ne se soient pas fait aider par leurs amis et aient réussi l'examen ?
- ב. On a choisi au hasard un élève qui s'est présenté à l'examen. Quelle est la probabilité qu'il remplisse au moins l'une des deux conditions I-II ?
- I) L'élève s'est fait aider par ses amis.
II) L'élève n'a pas réussi l'examen.

Deuxième partie – Géométrie et trigonométrie planes (20 points)

Répondez à l'une des questions 4-5 .

Attention ! Si vous répondez à plus d'une question, seule la première réponse de votre copie sera corrigée.

4. ABCD est un losange. E et F sont respectivement les milieux des côtés AB et BC .

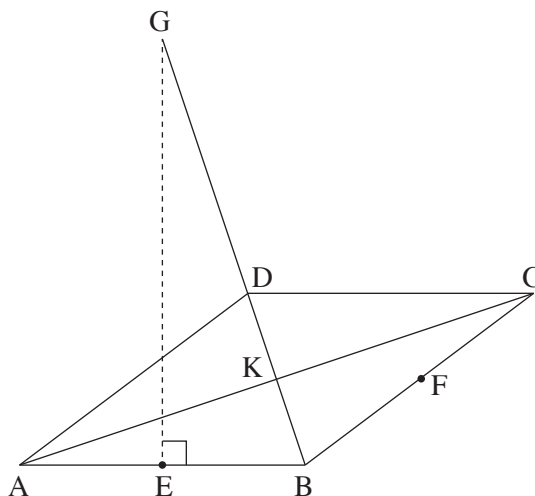
Le point K est le point d'intersection des diagonales du losange.

À partir du point E on trace une perpendiculaire à AB qui coupe le prolongement de la diagonale BD en un point G (voir figure).

- א. Démontrez que le point G est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

Le segment GF coupe la diagonale AC en un point M , qui est le centre du cercle circonscrit au triangle BDC .

- ב. Démontrez que les triangles MFC , BKC , et BFG sont semblables.



On note R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC ,
et r le rayon du cercle circonscrit au triangle BDC .

- ג. (1) Démontrez que $\frac{MC}{GB} = \frac{MF}{CF}$ et que $\frac{MF}{CF} = \frac{BK}{CK}$.
(2) Montrez que le rapport entre les diagonales du losange est égal à $\frac{r}{R}$.

5. ABC est un triangle rectangle ($\angle ABC = 90^\circ$) .

M est un point situé sur l'hypoténuse de sorte que $AM : MC = \sqrt{3} : 4$.

Données : $\angle ABM = 30^\circ$, $BM = 8$.

- א. (1) Notez $MC = 4x$, puis calculez les angles du triangle ABC .
(2) Calculez les rayons des cercles circonscrits aux triangles ABM et CMB .
ב. On note O_1 et O_2 , les centres respectifs des cercles circonscrits aux triangles ABM et CMB .
(1) Expliquez pourquoi le quadrilatère BO_1MO_2 est un cerf-volant [דלתון].
(2) Calculez la longueur du segment O_1O_2 .

**Troisième partie – Calcul différentiel et intégral de polynômes,
de fonctions racines, de fonctions rationnelles
et de fonctions trigonométriques (40 points)**

Répondez à deux des questions 6-8 (20 points par question).

Attention : Si vous répondez à plus de deux questions, seules les deux premières réponses de votre copie seront corrigées.

6. Soit la fonction $f(x) = \frac{ax - 1}{\sqrt{ax^2 - 2x + 1}}$. a est un paramètre.

Donnée : la fonction $f(x)$ est définie pour tout x .

⌘. Démontrez que $a > 1$.

Répondez au paragraphe ๓. Si nécessaire, exprimez en fonction de a .

๓. (1) Déterminez les coordonnées des points d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ avec les axes.
- (2) Déterminez les équations des asymptotes de la fonction $f(x)$, parallèles à l'axe des abscisses.
- (3) Déterminez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction $f(x)$ (s'il en existe).
- (4) Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.

Donnée : $a = 3$.

๔. Déterminez l'aire délimitée par le graphe de la fonction $f(x)$, par l'axe des abscisses et par les droites $x = \frac{2}{3}$ et $x = 2$.

๕. $g(x)$ est une fonction continue définie pour tout x .

On note S l'aire délimitée par le graphe de la fonction $f(x)$, par l'axe des abscisses et par les droites $x = \frac{1}{3}$ et $x = b$, ($b > \frac{1}{3}$).

Donnée : l'aire délimitée par le graphe de la fonction $f(x)$, par le graphe de la fonction $g(x)$ et par les droites $x = \frac{1}{3}$ et $x = b$ est égale à $2S$ pour tout b .

Exprimez $g(x)$ en fonction de $f(x)$ sur l'intervalle $x > \frac{1}{3}$ (indiquez les deux possibilités).

Il n'est pas nécessaire de démontrer votre réponse.

7. $f(x)$ est une fonction dérivable définie pour tout x , de sorte que $f(x) \neq 0$ pour tout x .

- א. Démontrez que si la fonction $f(x)$ est croissante sur un certain intervalle, alors la fonction $\frac{1}{f(x)}$ est décroissante sur ce même intervalle ;
et que si la fonction $f(x)$ est décroissante sur un certain intervalle, alors la fonction $\frac{1}{f(x)}$ est croissante sur ce même intervalle.

Soit la fonction $g(x) = \sin^2 x + \cos x + 2$, définie pour tout x .

- א. Existe-t-il un x pour lequel $g(x) = 0$? Justifiez.
- ב. (1) La fonction $g(x)$ est-elle une fonction paire ? Justifiez.
(2) Montrez que $g(x) = g(x + 2\pi)$ se vérifie pour tout x .
(3) Déterminez les coordonnées des points d'extremum de la fonction $g(x)$ dans l'intervalle $0 \leq x \leq \pi$, puis déterminez leur type.
(4) Tracez une esquisse du graphe de la fonction $g(x)$ sur l'intervalle $-\pi \leq x \leq 3\pi$.

Soit la fonction $h(x) = \frac{1}{\sin^2 x + \cos x + 2}$.

Répondez au paragraphe ג. Vous pouvez vous aider de vos réponses aux paragraphes précédents.

- ג. (1) Quel est le domaine de définition de la fonction $h(x)$? Justifiez.
(2) Tracez une esquisse du graphe de la fonction $h(x)$ sur l'intervalle $-\pi \leq x \leq \pi$ dans le repère dans lequel vous avez tracé le graphe de la fonction $g(x)$.

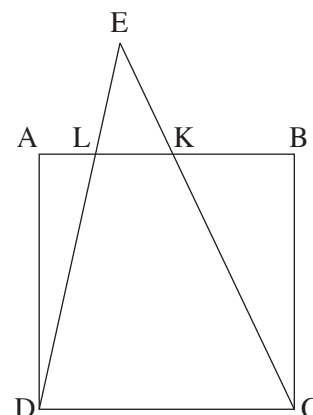
8. ABCD est un carré dont le côté a une longueur de 6 cm.

K et L sont des points sur le côté AB.

Il est donné que les droites CK et DL se coupent en un point E, qui se trouve en dehors du carré ABCD (voir figure).

On notera : $LK = x$.

- א. Exprimez la hauteur du triangle KLE en fonction de x .
- ב. Pour quelle valeur de x , la somme des aires des triangles BCK, ADL et KLE est-elle minimale ? Justifiez.
Vous pourrez laisser une racine dans votre réponse.



Bonne chance!

Tous droits réservés à l'État d'Israël.
Toute copie ou publication est interdite sans l'autorisation du
Ministère de l'Éducation.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך