

אלגברה לינארית

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: ארבע שעות.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים.

פרק ראשון 64 נקודות

פרק שני 36 נקודות

סה"כ 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר לשימוש: 1. כל חומר עזר כתוב בכתב-יד או מודפס על נייר.

2. מחשבון פשוט שאינו ניתן לתכנות.

ד. הוראות מיוחדות:

1. את התשובות לכל השאלות יש לרשום **אך ורק** על גבי דף התשובות שבנספח א'.

2. לנוחותך, לשאלון זה מצורף מילון מונחים בשפות עברית, ערבית, אנגלית ורוסית. תוכל להיעזר בו בעת הצורך.

הוראות למשגיח:

בתום הבחינה יש לוודא שהנבחנים הדביקו את מדבקת הנבחן שלהם במקום המיועד לכך בדף התשובות שבנספח א' וצירפו אותו למחברת הבחינה.

בשאלון זה 23 עמודים ו-3 עמודי נספחים.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר, אך מכוונות הן לנבחנות והן לנבחנים.

בהצלחה!

השאלות

פרק ראשון (64 נקודות)

ענה על ארבע מבין השאלות 1-5 (לכל שאלה – 16 נקודות).
 בכל אחת מן השאלות 1-5 נתונים חמישה סעיפים, א'-ה', שאינם תלויים זה בזה.
 בכל סעיף נתונות ארבע תשובות, שרק אחת מהן נכונה. בכל סעיף בחר את התשובה הנכונה, והקף בעיגול את הספרה המייצגת אותה בדף התשובות שבנספח א'.
 בשאלות שבחרת לענות עליהן, ענה על כל הסעיפים.
 הדבק את מדבקת הנבחן שלך במקום המיועד לכך בדף התשובות, והדק אותו למחברת הבחינה.

שאלה 1

הסעיפים א'-ג' מתייחסים לנתונים שלהלן:

נתונה מערכת המשוואות: $A\underline{x} = \underline{b}$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \quad \text{עבור:}$$

נתון כי למערכת הזו קיים **פתרון יחיד** והוא: $x = 2, y = -1, z = 0$, וכן נתון שאם נדרג את המטריצה המורחבת $(A, \underline{b})$ של מערכת המשוואות הנתונה, תתקבל המטריצה G שלהלן:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

א. נתונה מערכת המשוואות: $B\underline{x} = \underline{u}$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & v_1 & w_1 \\ b_2 & v_2 & w_2 \\ b_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \quad \text{עבור:}$$

קבע איזה מבין ההיגדים שלהלן הוא ההיגד הנכון:

1. $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, $z = 0$ מהווה פתרון בעבור מערכת המשוואות למערכת המשוואות אין פתרון
2. למערכת המשוואות יש אינסוף פתרונות
3. למערכת המשוואות יש אינסוף פתרונות
4. אי אפשר לדעת אם קיים פתרון למערכת המשוואות

ב. נתונה מערכת המשוואות: $E\underline{x} = \underline{0}$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & b_1 \\ u_2 & v_2 & b_2 \\ u_3 & v_3 & b_3 \end{pmatrix} \text{ עבור:}$$

קבע איזה מבין ההיגדים שלהלן הוא ההיגד הנכון:

1. למערכת המשוואות קיים פתרון יחיד והוא: $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$
2. למערכת המשוואות יש אינסוף פתרונות
3. למערכת המשוואות אין פתרון
4. אי אפשר לדעת אם קיים פתרון למערכת המשוואות

ג. נתונה מערכת המשוואות: $E\underline{x} = \underline{v}$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & b_1 \\ u_2 & v_2 & b_2 \\ u_3 & v_3 & b_3 \end{pmatrix} \text{ עבור:}$$

קבע איזה מבין ההיגדים שלהלן הוא ההיגד הנכון:

1. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ מהווה פתרון בעבור מערכת המשוואות למערכת המשוואות אין פתרון
2. למערכת המשוואות יש אינסוף פתרונות
3. למערכת המשוואות יש אינסוף פתרונות
4. אי אפשר לדעת אם קיים פתרון למערכת המשוואות

הסעיפים ד'-ה' מתייחסים לנתונים שלהלן:נתונה מערכת המשוואות: $A\underline{x} = \underline{b}$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} a-1 \\ a \\ -1 \\ -a^2+2a+8 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & a & a+4 \\ 0 & a+2 & 4 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{עבור:}$$

$$\text{לנוחותך: } -a^2 + 2a + 8 = -(a-4)(a+2).$$

ד. בעבור אילו ערכים של a יש למערכת הנתונה פתרון יחיד?

1. בעבור a השווה ל-0 בלבד
2. בעבור a השווה ל-2 בלבד
3. בעבור a השווה ל-4 בלבד
4. לא קיים ערך של a שעבורו יש למערכת הנתונה פתרון יחיד

ה. בעבור אילו ערכים של a אין למערכת הנתונה אף פתרון?

1. בעבור כל a השונה מ-4 בלבד
2. בעבור כל a השונה מ-(-2) בלבד
3. בעבור כל a השונה מ-4 ומ-(-2) בלבד
4. לא קיים ערך של a שבעבורו אין למערכת הנתונה אף פתרון

שאלה 2

א. נתונה המטריצה: $A = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ x & 1 & z \\ y & z & 2 \end{pmatrix}$.

נתון כי $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי של A שמתאים לערך העצמי 1.

קבע איזה מבין ההיגדים שלפניך הוא ההיגד הנכון:

1. $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$

2. $x = 1$, $y = 0$, $z = -1$

3. $x = -1$, $y = 0$, $z = -1$

4. $x = -1$, $y = 0$, $z = 1$

ב. נתונה מטריצה ריבועית A , וידוע שמתקיים $A^3 - 2A - I = 0$. נוסף על כך, נתונה המשוואה $A^2 \cdot (X + I) = A$, כאשר X היא מטריצה ריבועית גם כן.

קבע איזה מבין ההיגדים שלפניך הוא ההיגד הנכון:

1. $X = A^2 + 3I$

2. $X = A^2 - 3I$

3. $X = A^2$

4. $X = 2A^2 - 3I$

ג. נתונה מטריצה $A = \begin{pmatrix} x & x+1 & x+1 \\ x+1 & x & x+1 \\ x+1 & x+1 & x \end{pmatrix}$ התלויה בפרמטר ממשי x , ונתון ש- A הפיכה. מה יהיה ערכו של x ?

1. $x \neq -1$

2. $x = -\frac{2}{3}$

3. $x \neq -\frac{2}{3}$

4. $x \neq 0$

ד. תהי A מטריצה ריבועית מסדר $n \times n$. נתון כי למערכת המשוואות $A\underline{x} = A(-\underline{x}) + 4\underline{x}$ יש שני פתרונות שונים לפחות.

קבע איזה מבין ההיגדים שלפניך הוא ההיגד הנכון:

1. $\det(A - 2I) \neq 0$

2. המטריצה $A^2 - 4I$ היא הפיכה

3. $\det(4I - A^2) = \det(4I)$

4. הדרגה של המטריצה $4I - A^2$ שונה מ- n

ה. נתונות מטריצות ריבועיות A ו- B , ונתון כי $2A + 3B = 6AB$.

קבע איזה מבין ההיגדים שלפניך הוא ההיגד הנכון:

1. ההופכית למטריצה $I - 2A$ היא המטריצה $-I - 3B$

2. המטריצה $I - 2A$ לא הפיכה

3. המטריצה $I - 3B$ לא הפיכה

4. ההופכית למטריצה $I - 2A$ היא המטריצה $I - 3B$

שאלה 3

כל הסעיפים בשאלה זו מתייחסים למטריצה הזאת: $A = \begin{pmatrix} a & 0 & a-1 \\ 0 & 2 & 0 \\ a+1 & 0 & a \end{pmatrix}$, כאשר a הוא מספר ממשי.

א. מהי הדטרמיננטה של A^4 ?

1. 2

2. 4

3. 8

4. 16

ב. בעבור איזה ערך של a מתקיים: $AA^t = I$?

1. בעבור $a = 0$

2. בעבור $a = 1$

3. בעבור כל ערך של a

4. לא קיים ערך כזה של a

ג. בעבור איזה ערך של a תהיה המטריצה AA^t מטריצה הפיכה?

1. בעבור $a = 0$

2. בעבור $a = -1$

3. בעבור כל ערך של a

4. לא קיים ערך כזה של a

ד. בעבור איזה ערך של a תהיה המטריצה AA^t מטריצה אלכסונית?

1. בעבור כל ערך של a השונה מ-1

2. בעבור כל ערך של a השונה מ-0

3. רק בעבור $a = 0$

4. בעבור $a = 1$ או $a = -1$

ה. נתון כי $a = -1$.

יהי k מספר שלם חיובי כלשהו. קבע בעבור איזה ערך של k תהיה המטריצה A^k מטריצה הפיכה.

1. רק בעבור $k = 1$

2. בעבור כל ערך של k

3. בעבור כל ערך של k השונה מ-1

4. לא קיים ערך כזה של k

שאלה 4

הסעיפים א' ו-ב' מתייחסים לטרנספורמציה T , כאשר הטרנספורמציה $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$

מיוצגת על-ידי המטריצה $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. כלומר לכל $\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ מתקיים: $T(\underline{v}) = A \cdot \underline{v}$.

המטריצה A היא מטריצה מסדר 4×4 , ותלויה בפרמטר הממשי m .

א. קבע איזו מבין הטענות שלהלן היא נכונה:

1. $\dim(\text{Ker} T) = 3$ לכל m ממשי

2. אם $m \neq 0$ אז $\dim(\text{Im} T) \geq 3$

3. $\dim(\text{Ker} T) = 3$ רק בעבור $m = 0$

4. אם $m = 1$ אז $\dim(\text{Ker} T) = 3$, כי רק העמודה השנייה מתאפסת

ב. נתון כי $m = 2$.

קבע איזו מבין הטענות שלהלן היא נכונה:

1. לא קיים וקטור $\underline{v} \neq \underline{0}$ כך ש- $A^5 \cdot \underline{v} = \underline{0}$

2. הדרגה של המטריצה A^5 שווה ל-4

3. ארבע השורות של המטריצה A^5 מהוות בסיס למרחב $\mathbb{R}^4$

4. קיימים שני וקטורים שונים זה מזה $\underline{v} \neq \underline{w}$ כך ש- $A^5 \cdot \underline{v} = A^5 \cdot \underline{w}$

הסעיפים ג'-ה' מתייחסים לטרנספורמציה T , כאשר הטרנספורמציה $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

מיוצגת על-ידי המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. כלומר לכל $\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ מתקיים: $T(\underline{v}) = A \cdot \underline{v}$.

ג. מהם הערכים העצמיים של הטרנספורמציה T ?

1. 0 ו-4 בלבד

2. -3, 1 ו-0 בלבד

3. 0, -2 ו-4 בלבד

4. 0, 2 ו-3 בלבד

ד. קבע איזה מבין ההיגדים שלהלן הוא נכון:

1. T היא פונקצייה חד-חד-ערכית אך לא פונקצייה על

2. $\dim(\text{Im } T) - \dim(\text{Ker } T) = 2$

3. T היא לא פונקצייה חד-חד-ערכית אך היא פונקצייה על

4. $\dim(\text{Im } T) - \dim(\text{Ker } T) = 1$

ה. קבע איזה מבין ההיגדים הבאים נכון:

1. קיימים שלושה וקטורים בלתי תלויים לינארית $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ כך ש-

$$T(\underline{u}_1) = \underline{0}, T(\underline{u}_2) = \underline{u}_2, T(\underline{u}_3) = -3\underline{u}_3$$

2. קיימים שני וקטורים בלתי תלויים לינארית $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ כך ש- $T(\underline{v}_1) = 4\underline{v}_1$, $T(\underline{v}_2) = 4\underline{v}_2$

3. לא קיים בסיס של $\mathbb{R}^3$ המורכב מווקטורים עצמיים של T

4. לא קיימים שני וקטורים בלתי תלויים לינארית $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2\}$ כך ש- $T(\underline{w}_1 + \underline{w}_2) = \underline{0}$

$$T(\underline{w}_1 - \underline{w}_2) = \underline{0} \text{ וגם}$$

סעיפים א'–ה' מתייחסים לנתונים שלהלן:

יהי m מספר ממשי. נתון כי $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ הם ארבעה וקטורים שפורשים את המרחב $\mathbb{R}^4$. נוסף על כך, נתון כי $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ הם שלושה וקטורים במרחב $\mathbb{R}^4$, שאפשר לבטא אותם כקומבינציה לינארית של $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ כך:

$$\begin{cases} \underline{x} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3 + \underline{v}_4 \\ \underline{y} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3 + 2\underline{v}_4 \\ \underline{z} = -\underline{v}_1 - \underline{v}_2 - \underline{v}_3 + m\underline{v}_4 \end{cases}$$

א. קבע איזה מבין ההיגדים הבאים נכון:

1. הקבוצה $\{\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}\}$ תהיה בלתי תלויה לינארית לכל מספר ממשי m
2. לכל מספר ממשי m , תת־המרחב הנפרש על־ידי הקבוצה $\{\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}\}$ הוא בעל ממד 3
3. אם $m \neq 0$, אז הקבוצה $\{\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}\}$ מהווה בסיס לתת־המרחב הנפרש על־ידי הקבוצה $\{\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}\}$
4. לכל מספר ממשי m , הקבוצה $\{\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}\}$ לא מהווה בסיס לתת־המרחב הנפרש על־ידי הקבוצה $\{\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}\}$

ב. נתון כי $m = -2$.

מהו ערך הממד של תת־המרחב הנפרש על־ידי הקבוצה $\{\underline{x}, \underline{x} - \underline{y}, \underline{x} - \underline{z}, \underline{x} - \underline{y} - \underline{z}\}$?

1. ערך הממד הוא 1
2. ערך הממד הוא 2
3. ערך הממד הוא 3
4. ערך הממד הוא 4

ג. נתון כי $m = -2$.

קבע איזה מבין ההיגדים הבאים נכון:

1. הקבוצה $\{\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}\}$ בלתי תלויה לינארית
2. תת־המרחב הנפרש על־ידי הקבוצה $\{\underline{x}, \underline{x} + \underline{y}, \underline{x} + \underline{y} + \underline{z}\}$ שווה לתת־המרחב הנפרש על־ידי הקבוצה $\{\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}\}$
3. קיים וקטור $\underline{w}$ כך שהקבוצה $\{\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}, \underline{w}\}$ מהווה בסיס למרחב $\mathbb{R}^4$
4. הקבוצה $\{\underline{x}, \underline{x} + \underline{y}, \underline{x} + \underline{y} + 2\underline{z}, \underline{x} - \underline{y} - \underline{z}\}$ מהווה בסיס למרחב $\mathbb{R}^4$

ד. נתון כי $m = -2$. קבע איזה מבין ההיגדים הבאים נכון:

1. הווקטורים $\{\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}, \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ פורשים את כל המרחב $\mathbb{R}^4$
2. **לכל** וקטור $\underline{w}$ במרחב $\mathbb{R}^4$, הקבוצה $\{\underline{w}, \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ **לא** מהווה בסיס למרחב $\mathbb{R}^4$
3. **קיים** וקטור $\underline{w}$ במרחב $\mathbb{R}^4$, שעבורו הקבוצה $\{\underline{w}, \underline{x}, \underline{y}, \underline{z}\}$ מהווה בסיס למרחב $\mathbb{R}^4$
4. הווקטורים שבקבוצה $\{\underline{x} + \underline{y} + \underline{z}, \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ פורשים מרחב בעל ממד 3

ה. יהי $\underline{w} \neq \underline{0}$ וקטור ניצב לכל אחד מהווקטורים $\underline{v}_1, \underline{v}_1 - \underline{v}_2, \underline{v}_1 - \underline{v}_2 - \underline{v}_3$.

קבע איזה מבין ההיגדים הבאים נכון:

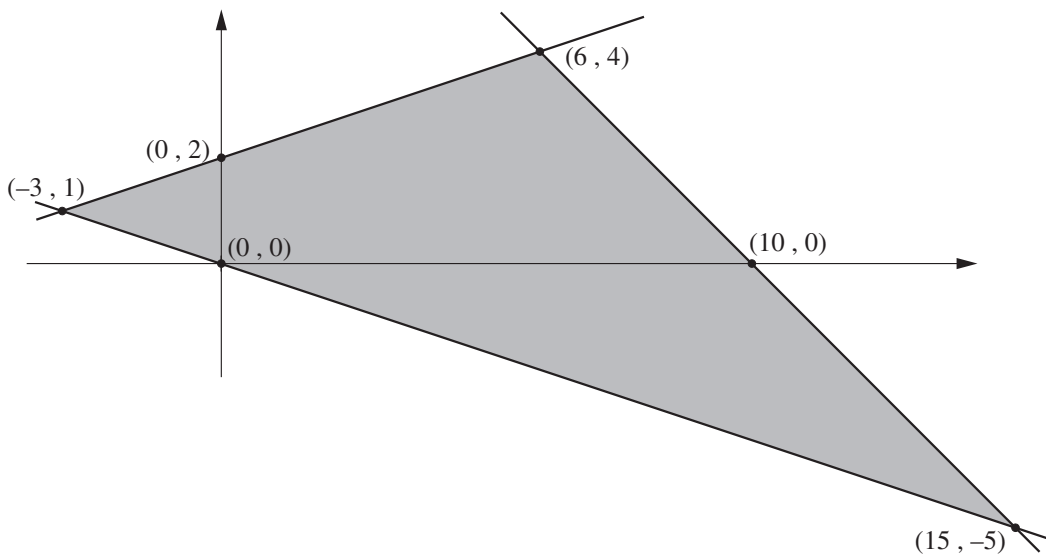
1. הקבוצה $\{\underline{w}, \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ מהווה בסיס למרחב $\mathbb{R}^4$
2. הווקטורים שבקבוצה $\{\underline{w}, \underline{v}_1, \underline{v}_1 - \underline{v}_2, \underline{v}_1 - \underline{v}_2 - \underline{v}_3\}$ תלויים לינארית
3. הווקטור $\underline{w}$ תלוי לינארית בהכרח בווקטור $\underline{v}_4$
4. $\underline{w} \cdot \underline{x} = 0$ בהכרח

פרק שני (36 נקודות)

ענה על שתיים מבין השאלות 6–8 (לכל שאלה – 18 נקודות).
 בכל אחת מן השאלות 6–8 נתונים שבעה סעיפים. בכל סעיף נתונות ארבע תשובות, שרק אחת מהן נכונה. בכל סעיף בחר את התשובה הנכונה, והקף בעיגול את הספרה המייצגת אותה בדף התשובות שבנספח א'.
 בשאלות שבחרת לענות עליהן, ענה על כל הסעיפים.

שאלה 6

בשאלה זו **שבעה** סעיפים, א'–ז', שאינם תלויים זה בזה. ענה על **כל** הסעיפים.
 להלן סרטוט עבור מערכת אילוצים לבעיית תכנון לינארי מסוימת. השטח האפור מהווה את תחום הפתרונות האפשריים של הבעיה.

**איור לשאלה 6**

א. מערכת האילוצים המתאימה לבעיה היא:

1. $x - 3y \geq -6$ (1)

(2) $x + 3y \geq 0$

(3) $x + y \leq 10$

2. $x - 3y \leq -6$ (1)

(2) $x + 3y \geq 0$

(3) $x + y \leq 10$

3. $x - 3y \leq -6$ (1)

(2) $x + 3y \geq 0$

(3) $x + y \leq 10$

(4) $x, y \geq 0$

4. $x - 3y \geq -6$ (1)

(2) $x + 3y \geq 0$

(3) $x + y \leq 10$

(4) $x, y \geq 0$

ב. בהינתן פונקציית המטרה $\max \{z = 3x + 3y\}$, מהו הפתרון האופטימלי לבעיה?

1. יש אינסוף פתרונות אופטימליים

2. $(15, -5)$

3. $(6, 4)$

4. $(-3, 1)$

ג. בהינתן פונקציית המטרה $\min \{z = 3x + 3y\}$, מהו הפתרון האופטימלי לבעיה?

1. יש אינסוף פתרונות אופטימליים

2. $(15, -5)$

3. $(6, 4)$

4. $(-3, 1)$

ד. בהינתן פונקציית המטרה $\min \{z = 3x - 3y\}$, מהו הפתרון האופטימלי לבעיה?

1. יש אינסוף פתרונות אופטימליים
2. $(-3, 1)$
3. $(15, -5)$
4. פתרון אופטימלי שאינו חסום

ה. בהינתן פונקציית המטרה $\max \{z = 3x - 3y\}$, מהו הפתרון האופטימלי לבעיה?

1. יש אינסוף פתרונות אופטימליים
2. $(-3, 1)$
3. $(15, -5)$
4. $(6, 4)$

ו. בהינתן פונקציית המטרה $\max \{z = kx + y\}$, בעבור אילו ערכים של k יהיה $(6, 4)$ פתרון אופטימלי יחיד לבעיה?

1. לא קיים k כזה
2. $k < -\frac{1}{3}$
3. $k > 1$
4. $-\frac{1}{3} < k < 1$

ז. בהינתן פונקציית המטרה $\min \{z = kx + y\}$, בעבור אילו ערכים של k יהיה $(6, 4)$ פתרון אופטימלי יחיד לבעיה?

1. לא קיים k כזה
2. $k < -\frac{1}{3}$
3. $k > 1$
4. $-\frac{1}{3} < k < 1$

שאלה 7

בשאלה זו **שבעה** סעיפים, א'-ז', שאינם תלויים זה בזה. ענה על **כל** הסעיפים.

א. המשתנים A-E בטבלה שלפניך מייצגים פתרון אפשרי, לא בסיסי, לבעיית תובלה:

מקורות	יעדים				היצע
	1	2	3	4	
1	A		B		100
2		C			10
3		D		E	50
ביקוש	30	40	70	20	

מה יהיו ערכי המשתנים A-E ?

1. $A = 30$, $B = 70$, $C = 20$, $D = 30$, $E = 20$

2. $A = 30$, $B = 70$, $C = 20$, $D = 20$, $E = 30$

3. $A = 30$, $B = 70$, $C = 10$, $D = 20$, $E = 30$

4. $A = 30$, $B = 70$, $C = 10$, $D = 30$, $E = 20$

ב. בטבלה שלפניך נתון פתרון בסיסי אפשרי לבעיית תובלה:

מקורות	יעדים				היצע	u_i
	1	2	3	4		
1	2	8	5	6	30	u_1
		20		10		
2	4	10	8	2	60	u_2
				60		
3	5	3	7	1	70	u_3
	20	5	45			
ביקוש	20	25	45	70		
v_j	v_1	v_2	v_3	v_4		

מה יהיו ערכי המשתנים $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, v_4$?

קבע איזה מבין ההיגדים הבאים אינו נכון.

1. $u_1 = 0, u_2 = -4, u_3 = -5, v_1 = 10, v_2 = 8, v_3 = 12, v_4 = 6$

2. $u_1 = 5, u_2 = 1, u_3 = 0, v_1 = 5, v_2 = 3, v_3 = 7, v_4 = 1$

3. $u_1 = 8, u_2 = 4, u_3 = 3, v_1 = 2, v_2 = 0, v_3 = 4, v_4 = -2$

4. $u_1 = 5, u_2 = 2, u_3 = 3, v_1 = 10, v_2 = 6, v_3 = 15, v_4 = 1$

ג. הטבלה שלפניך מכילה נתונים לבעיית תובלה, ונתונים ערכיהם של

$$u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, v_4.$$

מקורות	יעדים				היצע	u_i
	1	2	3	4		
1	2	8	5	6	70	0
2	4	10	8	2	25	2
3	5	3	7	1	15	-5
ביקוש	28	25	50	7		
v_j	2	8	5	6		

מהו הפתרון הבסיסי האפשרי לבעיית התובלה הנתונה?

$$1. \quad x_{11} = 28, \quad x_{12} = 25, \quad x_{13} = 17, \quad x_{23} = 25, \quad x_{33} = 8, \quad x_{34} = 7$$

$$2. \quad x_{12} = 20, \quad x_{13} = 50, \quad x_{21} = 25, \quad x_{31} = 3, \quad x_{32} = 5, \quad x_{34} = 7$$

$$3. \quad x_{11} = 13, \quad x_{13} = 50, \quad x_{14} = 7, \quad x_{21} = 15, \quad x_{22} = 10, \quad x_{32} = 15$$

$$4. \quad x_{11} = 13, \quad x_{13} = 50, \quad x_{14} = 7, \quad x_{22} = 10, \quad x_{31} = 15, \quad x_{34} = 0$$

ד. בטבלה שלפניך נתון פתרון לבעיית תובלה:

מקורות	יעדים				היצע
	1	2	3	4	
1	2	8	5	6	50
		30	20		
2	4	10	8	2	40
	15		10	15	
3	5	3	7	1	25
				25	
ביקוש	15	30	30	40	

קבע איזה מבין ההיגדים הבאים הוא ההיגד הנכון:

1. הפתרון הנתון אינו פתרון אפשרי
2. הפתרון הנתון הוא פתרון אפשרי אך לא בסיסי
3. הפתרון הנתון הוא פתרון בסיסי אפשרי אך לא אופטימלי
4. הפתרון הנתון הוא פתרון בסיסי אופטימלי

ה. הטבלה שלפניך מכילה נתונים לבעיית תובלה:

מקורות	יעדים				היצע
	1	2	3	4	
1	2	8	5	6	50
2	4	10	8	2	40
3	5	3	7	1	25
ביקוש	15	30	30	40	

מהו הפתרון האופטימלי? (הערה: הפתרון לא בהכרח בסיסי)

1. $x_{11} = 15$, $x_{12} = 30$, $x_{13} = 5$, $x_{23} = 25$, $x_{24} = 15$, $x_{34} = 25$
2. $x_{11} = 15$, $x_{12} = 5$, $x_{13} = 30$, $x_{24} = 40$, $x_{32} = 25$
3. $x_{11} = 15$, $x_{12} = 30$, $x_{13} = 5$, $x_{24} = 40$, $x_{32} = 25$
4. $x_{11} = 13$, $x_{12} = 5$, $x_{13} = 30$, $x_{23} = 25$, $x_{24} = 15$, $x_{34} = 25$

1. בטבלה שלפניך מתוארת בעיית השמה (בעיית מינימיזציה):

מפעלים	לקוחות			
	W	X	Y	Z
A	4	5	1	4
B	2	8	3	3
C	8	3	5	9
D	9	2	7	5

מה יהיה הפתרון האופטימלי לבעיה הנתונה?

1. המפעל A מספק פריטים ללקוח Y, המפעל B מספק פריטים ללקוח W, המפעל C מספק פריטים ללקוח X, המפעל D מספק פריטים ללקוח Z, והפתרון הזה לא יחיד.
2. המפעל A מספק פריטים ללקוח Y, המפעל B מספק פריטים ללקוח W, המפעל C מספק פריטים ללקוח X, המפעל D מספק פריטים ללקוח Z, והפתרון הזה הוא יחיד.
3. המפעל A מספק פריטים ללקוח Y, המפעל B מספק פריטים ללקוח Z, המפעל C מספק פריטים ללקוח W, המפעל D מספק פריטים ללקוח X, והפתרון הזה הוא יחיד.
4. המפעל A מספק פריטים ללקוח Y, המפעל B מספק פריטים ללקוח Z, המפעל C מספק פריטים ללקוח W, המפעל D מספק פריטים ללקוח X, והפתרון הזה לא יחיד.

ז. בטבלה שלפניך מתוארת בעיית השמה (בעיית מקסימיזציה):

מפעלים	לקוחות			
	W	X	Y	Z
A	4	5	1	4
B	2	8	3	3
C	8	3	5	9
D	9	2	7	5

מה יהיה ערכו של פתרון אופטימלי לבעיה?

1. 26

2. 27

3. 28

4. 29

שאלה 8

בשאלה זו שבעה סעיפים, א'–ז'. ענה על כל הסעיפים.

לפניך בעיה פרימלית של תכנון לינארי:

$$\max \{z = 24x_1 + 23x_2 + 32x_3 + 20x_4\}$$

בכפוף לאילוצים האלה:

$$4x_1 + 14x_2 + 8x_3 + 14x_4 \leq 180$$

$$4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 16x_4 \leq 130$$

$$8x_1 + 10x_2 + 6x_3 + 6x_4 \leq 170$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, 4$$

הפתרון האופטימלי **היחיד** של הבעיה הפרימלית הוא:

$$x_1 = 7, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 19, \quad x_4 = 0$$

הפתרון האופטימלי **היחיד** של הבעיה הדואלית הוא:

$$y_1 = 2.8, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 1.6$$

כאשר y_i הוא המשתנה הדואלי המתאים לאילוץ הפרימלי i , עבור $i = 1, 2, 3$.

א. לאחר הרצת האלגוריתם סימפלקס עבור הבעיה הנתונה, מתקבלת טבלה סופית. כמה מקדמים שווים לאפס יהיו בשורת ה- z שבטבלה?

1. שלושה
2. ארבעה
3. חמישה
4. לא ניתן לדעת על פי הנתונים

ב. מה יהיה ערכו של משתנה הסרק של האילוץ השני?

1. 0
2. 13
3. 26
4. לא ניתן לדעת על פי הנתונים

ג. קבע איזה מבין ההיגדים שלהלן הוא ההיגד הנכון עבור הפתרון האופטימלי של הבעיה הפרימלית:

1. משתנה הסרק של האילוץ הראשון בלבד הוא משתנה בסיסי
2. משתנה הסרק של האילוץ השני הוא משתנה בסיסי
3. משתני הסרק של האילוצים הראשון והשלישי הם משתנים בסיסיים
4. משתני הסרק של כל האילוצים הם משתנים בסיסיים

ד. שינו את המקדמים של x_2 בבעיה הפרימלית המקורית, והתקבלה הבעיה הזו:

$$\max \{z = 24x_1 + 30x_2 + 32x_3 + 20x_4\}$$

בכפוף לאילוצים האלה:

$$4x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 14x_4 \leq 180$$

$$4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 16x_4 \leq 130$$

$$8x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 6x_4 \leq 170$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, 4$$

מהו הפתרון של הבעיה הדואלית החדשה?

$$1. \quad y_1 = 7, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 19$$

$$2. \quad y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 3.2$$

$$3. \quad y_1 = 5.6, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 3.2$$

$$4. \quad y_1 = 2.8, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 1.6$$

ה. לבעיה הפרימלית המקורית הוסיפו משתנה חדש x_{new} , והתקבלה הבעיה הזו:

$$\max \{z = 24x_1 + 23x_2 + 32x_3 + 20x_4 + 60x_{\text{new}}\}$$

בכפוף לאילוצים האלה:

$$4x_1 + 14x_2 + 8x_3 + 14x_4 + 6x_{\text{new}} \leq 180$$

$$4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 16x_4 + 5x_{\text{new}} \leq 130$$

$$8x_1 + 10x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 10x_{\text{new}} \leq 170$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0$$

מהו הפתרון האופטימלי של הבעיה הדואלית החדשה?

1. $y_1 = 0$, $y_2 = 3$, $y_3 = 0$, $y_4 = 0$

2. $y_1 = 5.6$, $y_2 = 0$, $y_3 = 3.2$

3. $y_1 = 2.8$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1.6$

4. $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 10$

1. שינו את האגף הימני של האילוח השני בבעיה הפרימלית המקורית. האגף הימני החדש, לאחר השינוי, הוא 120 (במקום 130). כתוצאה מכך האילוח החדש יהיה:

$$4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 16x_4 \leq 120$$

קבע איזה מבין ההיגדים הבאים יהיה ההיגד הנכון בעקבות השינוי:

1. הפתרון האופטימלי של הבעיה הפרימלית המקורית הופך לבלתי אפשרי
2. הפתרון האופטימלי של הבעיה הפרימלית המקורית נשאר אפשרי ואופטימלי
3. הפתרון האופטימלי של הבעיה הפרימלית המקורית נשאר אפשרי אך לא אופטימלי
4. האילוח השני הופך לאילוח שמתקיים כשוויון (כלומר הופך לאילוח פעיל)

2. לבעיה הפרימלית המקורית הוסיפו אילוח חדש: $2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 \leq b$. הפתרון הנתון של הבעיה הפרימלית יישאר אופטימלי עבור כל b שמקיים:

1. $b \geq 128$

2. $b \leq 108$

3. $b < 128$

4. $b > 60$

בהצלחה!

הדבק את מדבקת הנבחן שלך במקום המיועד לכך, והדק את הדף הזה למחברת הבחינה שלך.

הקף בעיגול את הספרה המייצגת את התשובה הנכונה לכל סעיף.

שאלה 1					שאלה 2					שאלה 3					שאלה 4				
סעיף א	1	2	3	4	סעיף א	1	2	3	4	סעיף א	1	2	3	4	סעיף א	1	2	3	4
סעיף ב	1	2	3	4	סעיף ב	1	2	3	4	סעיף ב	1	2	3	4	סעיף ב	1	2	3	4
סעיף ג	1	2	3	4	סעיף ג	1	2	3	4	סעיף ג	1	2	3	4	סעיף ג	1	2	3	4
סעיף ד	1	2	3	4	סעיף ד	1	2	3	4	סעיף ד	1	2	3	4	סעיף ד	1	2	3	4
סעיף ה	1	2	3	4	סעיף ה	1	2	3	4	סעיף ה	1	2	3	4	סעיף ה	1	2	3	4
שאלה 5					שאלה 6					שאלה 7					שאלה 8				
סעיף א	1	2	3	4	סעיף א	1	2	3	4	סעיף א	1	2	3	4	סעיף א	1	2	3	4
סעיף ב	1	2	3	4	סעיף ב	1	2	3	4	סעיף ב	1	2	3	4	סעיף ב	1	2	3	4
סעיף ג	1	2	3	4	סעיף ג	1	2	3	4	סעיף ג	1	2	3	4	סעיף ג	1	2	3	4
סעיף ד	1	2	3	4	סעיף ד	1	2	3	4	סעיף ד	1	2	3	4	סעיף ד	1	2	3	4
סעיף ה	1	2	3	4	סעיף ה	1	2	3	4	סעיף ה	1	2	3	4	סעיף ה	1	2	3	4
סעיף ו	1	2	3	4	סעיף ו	1	2	3	4	סעיף ו	1	2	3	4	סעיף ו	1	2	3	4
סעיף ז	1	2	3	4	סעיף ז	1	2	3	4	סעיף ז	1	2	3	4	סעיף ז	1	2	3	4

נספח ב': מילון מונחים (3 עמודים)

לשאלון 714003, אביב תשע"ח

תרגום המונח			המונח
אנגלית	רוסית	ערבית	
חלק א' - אלגברה לינארית			
infinite number of solutions	бесконечное число решений	عدد غير نهائي من الحلول	אינסוף פתרונות
base	основание, базис	أساس	בסיס
dual	Двойственность	مُزدَوِّج	דואלי
determinant	Определитель, детерминант	المُحدِّدات	דטרמיננטה
rank	Степень, ранг	درجة	דרגה
vector	Вектор	مُتَّجِه	וקטור
one-one correspondence	Инъекция, одно-однозначное отображение	ذات قيمة واحدة	חד-חד-ערכי
transformation	отображение	تحوّل	טרנספורמציה
matrix	матрица	مصفوفة	מטריצה
inverse matrix	обратная матрица	مصفوفة معكوسة	מטריצה הופכית
invertible matrix	Невырожденная матрица	مصفوفة يمكن عكسها	מטריצה הפיכה
dimension	Размерность	بُعد	ממד
system of equations	Система уравнений	هيئة مُعَادَلَات	מערכת משוואות
homogeneous system of equations	однородная система уравнений	هيئة مُعَادَلَات متجانسة	מערכת משוואות הומוגנית
coefficients	коэффициенты	مُعَامِلَات	מקדמים
space	пространство	بُعد	מרחב
slack variable	дополнительная переменная	مُتَغَيِّر خامل	משתנה סרק

תרגום המונח			המונח
אנגלית	רוסית	ערבית	
scalar	скаляр	عدديّ	סקלר
onto	Сюръекция	عُلْيَا	על
eigenvalue	собственное число	قيمة ذاتيّة	ערך עצמי
חלק ב' - תכנון לינארי			
constraint	ограничение, неравенство	إجبار	אילוץ
demand	спрос	الطلب	ביקוש
transportation problem	Транспортная задача	مشكلة النقل	בעיית תובלה
primal problem	Прямая задача	مشكلة بدائيّة	בעיה פרימלית
supply	Предложение	العرض	היצע
simplex tableau	симплекс-таблица	جدول بسيط	טבלת סימפלקס
dummy target	"свалка" — дополнительный пункт, куда свозят все лишнее производство	هدف وهميّ	יעד דמה
free variable	неограниченный по знаку	مُتَغَيِّر حرّ (متغيّر غير مُرْمَز)	לא מוגבל בסימן
dummy source	дополнительный (искусственный) производитель	مصدر وهميّ	מקור דמה
basic variable	базисная переменная	مُتَغَيِّر أساسيّ	משתנה בסיסי
cost	стоимость	تكلفة	עלות
objective function	целевая функция	وظيفة هادفة	פונקציית מטרה
parameter	Параметр	بارامتر	פרמטר
optimal solution	оптимальное решение	الحلّ الأمثل	פתרון אופטימלי

תרגום המונח			המונח
אנגלית	רוסית	ערבית	
bounded solution	ограниченное решение	حلّ مسدود	פתרון חסום
unique solution	единственное решение	حلّ وحيد	פתרון יחיד
vertex	вершина	رأس	קודקוד
linear combination	линейная комбинация	مزيج خطّي	קומבינציה לינארית
northwestern corner method	Метод северо-западного угла	طريقة الركن الشمالي الغربي	שיטת הפינה הצפון-מערבית
feasible solutions set	область допустимых решений	مجال الحلول المُمكنة	תחום הפתרונות האפשריים
linear programming	Линейное программирование	البرمجة الخطّية	תכנון לינארי
linear dependence	линейная зависимость	الاعتماد الخطّي	תלות לינארית