

מ ת מ ט י ק ה
5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

מатематика
5 единиц обучения – первый вопросник

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות

— 20×2 — 40 נקודות

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור

— 20×1 — 20 נקודות

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

— 20×2 — 40 נקודות

סה"כ — 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

2. דפי נוסחאות (מצורפים).

3. מילון לפי בחירת הנבחן.

ד. הוראות מיוחדות:

1. אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
2. התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
3. לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה. שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

Вопросы

Обратите внимание! Объясняйте все ваши действия, включая вычисления, подробным и ясным образом.

Недостаточная детализация может снизить вашу оценку или привести к аннулированию экзамена.

Раздел первый – алгебра и теория вероятности

(40 баллов)

Ответьте на два из вопросов 1-3 (за каждый вопрос – 20 баллов).

Обратите внимание! Если вы ответите более чем на два вопроса, будут проверены только первые два из ответов в вашей тетради.

1. В гостинице есть два бассейна: бассейн 'א и бассейн 'ב.

Объем бассейна 'א – V_1 , а объем бассейна 'ב – V_2 .

Бассейны наполняют водой посредством 4 труб с одинаковой мощностью.

В определенный день оба бассейна были пусты.

Бассейн 'א начали наполнять при помощи четырех данных труб. Когда бассейн 'א наполнился до $\frac{1}{6}$ своего объема, одну из труб переключили на наполнение бассейна 'ב и начали наполнять его через эту трубу. Когда бассейн 'א наполнился до половины, переключили еще две трубы на наполнение бассейна 'ב.

Наполнение обоих бассейнов завершилось в один и тот же момент времени.

Все трубы подавали воду без перерыва вплоть до наполнения обоих бассейнов.

Вычислите отношение $\frac{V_1}{V_2}$.

2. a_n – арифметическая прогрессия, разность которой, d , отлична от 0.

Дано: $a_7 = -a_{17}$.

(א) Найдите a_{12} .

(ב) (1) Существует ли в данной прогрессии член, значение которого равно $-a_1$?

Обоснуйте свой ответ.

(2) Найдите натуральное число n , для которого сумма n первых членов данной прогрессии равна 0.

(ג) Существует ли натуральное n , для которого $a_n \cdot a_{n+1} < 0$?

Если да, найдите такое n , если нет – обоснуйте.

(ד) Можно ли узнать, сколько отрицательных членов есть в данной прогрессии?

Обоснуйте свой ответ. (Дайте ответ для различных случаев).

/продолжение на странице 3/

3. У Михаль есть уравновешенный кубик [קובייה מאוזנת]. На трех гранях кубика написано число 2, а на трех других гранях кубика – число 4.

У Галит есть другой уравновешенный кубик. На каждой из граней кубика Галит написано одно из чисел: 1 или 3.

Михаль и Галит играют в игру, состоящую из пяти туров. Участница, которая победит в большем количестве туров, чем ее соперница, победит в игре.

В ходе каждого тура игры каждая из участниц бросает свой кубик один раз.

Победительницей тура является участница, на кубике которой выпадает большее число.

Дано, что в одном туре вероятность того, что Михаль победит, составляет $\frac{7}{12}$.

(א) На скольких гранях кубика Галит написано число 1? Обоснуйте свой ответ.

(ב) Какова вероятность того, что Галит победит в игре?

(ג) Какова вероятность того, что Галит победит в игре, если известно, что она победила в первом туре?

Раздел второй – геометрия и тригонометрия на плоскости (20 баллов)

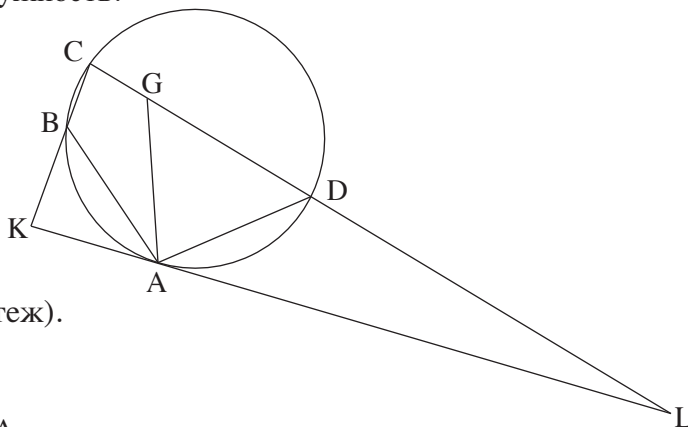
Ответьте на один из вопросов 4-5.

Обратите внимание! Если вы ответите более чем на один вопрос, будет проверен только первый ответ в вашей тетради.

4. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность.

Точка G – такая точка на стороне CD ,
 что $AB = AG$, а также $CB = CG$.

Касательная к окружности в точке A
 пересекает продолжение стороны CD
 в точке L и пересекает продолжение
 стороны CB в точке K (смотрите чертеж).



(*) Докажите, что $AD = AG$.

(*) (1) Докажите, что $\triangle ABK \sim \triangle CDA$.

(2) Докажите, что $AD^2 = BK \cdot CD$.

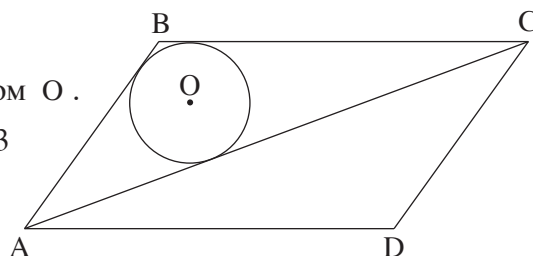
(*) Докажите, что $\frac{S_{\triangle LDA}}{S_{\triangle KAB}} = \frac{LA}{AK}$.

5. Дан параллелограмм $ABCD$.

AC – длинная диагональ, как показано на чертеже.

В треугольник ABC вписана окружность с центром O .

Дано: точка O находится на расстоянии 6 и 3
 от прямых AD и AC соответственно;
 $OA = 10$



(*) Вычислите величины углов параллелограмма.

(*) Вычислите длину диагонали AC .

(*) Вычислите площадь данного параллелограмма.

Раздел третий – дифференциальное и интегральное исчисление полиномов, функций, содержащих корни, рациональных функций и тригонометрических функций (40 баллов)

Ответьте на два из вопросов 6-8 (за каждый вопрос – 20 баллов).

Обратите внимание! Если вы ответите более чем на два вопроса, будут проверены только первые два из ответов в вашей тетради.

6. Даны функции $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$, $g(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$.

Ответьте на вопросы пункта (⌘) для области $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$.

- (⌘) (1) Найдите область определения функции $f(x)$.
(2) Найдите уравнения асимптот функции $f(x)$, перпендикулярных оси x .
(3) Найдите области возрастания и убывания функции $f(x)$ (если таковые существуют).
(4) Начертите схематический график функции $f(x)$.

Ответьте также на вопросы пункта (⌚) для области $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$.

- (⌚) (1) Найдите область определения функции $g(x)$.
(2) Докажите: $g(x) = -f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
(3) Начертите схематический график функции $g(x)$.

Вы можете воспользоваться своими ответами на вопросы предыдущих пунктов.

(⌚) Найдите значение выражения $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$. Обоснуйте свой ответ.

7. Дано семейство функций: $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2 - a}$. a – параметр, $a \neq 0$, $a \neq 4$.

Ответьте на вопросы пункта (א). При необходимости выразите ответы при помощи a .

При необходимости дайте отдельные ответы для $a > 0$ и $a < 0$.

- (א) (1) Найдите область определения функции $f(x)$.
 (2) Найдите координаты точек пересечения графика функции $f(x)$ с осями координат.
 (3) Найдите уравнение асимптоты функции $f(x)$, параллельной оси x .
 (4) Найдите уравнения асимптот функции $f(x)$, перпендикулярных оси x (если таковые существуют).

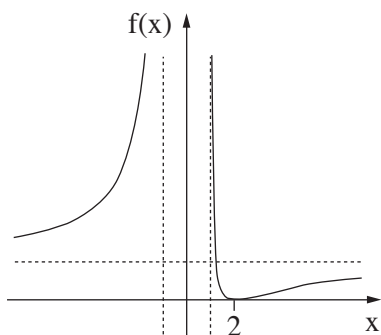
Ответьте на вопрос пункта (ב). При необходимости выразите ответ при помощи a .

При необходимости дайте отдельные ответы для $a > 4$ и $a < 4$.

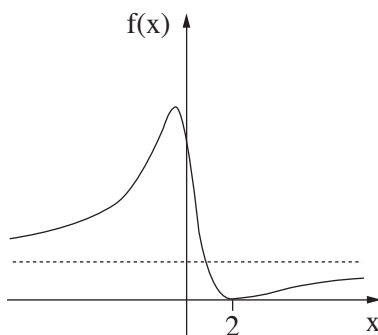
- (ב) Найдите координаты точек экстремума функции $f(x)$ и определите их тип.
 (ג) Ниже приведены три возможных графика функции $f(x)$, каждый из них для другого значения a .

Напишите, какова область значений a , подходящая для каждого из графиков I-III.

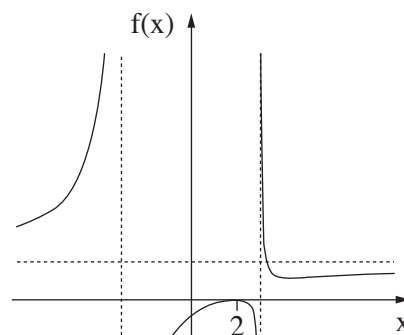
Обоснуйте свой ответ.



III



II



I

8. Дана функция $f(x) = \frac{1}{x^3}$.

Провели прямую, касательную к графику функции $f(x)$ в точке, в которой $x = t$.

Дано: $1 \leq t \leq 5$.

Данная касательная пересекает ось x в точке A и ось y – в точке B .

Точка O – это точка начала координат.

- (א) Найдите координату x точки касания, для которой сумма длин катетов треугольника AOB будет минимальной.
- (ב) Найдите координату x точки касания, для которой сумма длин катетов треугольника AOB будет максимальной.

Желаем успеха!

Авторские права принадлежат Государству Израиль.
Копировать или публиковать можно только
с разрешения Министерства просвещения.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.
אין להעתיק או לפרסם
אלא ברשות משרד החינוך.