

Mathématiques
5 unités d'étude - premier questionnaire

Instructions au candidat

א. Durée de l'examen : trois heures et demie.

ב. Structure du questionnaire et barème de notation :

Ce questionnaire comporte trois parties.

Première partie — Algèbre et probabilités

$2 \times 20 = 40$ points

Deuxième partie — Géométrie et trigonométrie planes

$1 \times 20 = 20$ points

Troisième partie — Calcul différentiel et intégral

de polynômes, de fonctions racines,

de fonctions rationnelles

et de fonctions trigonométriques

$2 \times 20 = 40$ points

Total — 100 points

ג. Matériel auxiliaire autorisé :

(1) Calculatrice non graphique. Il est interdit d'utiliser les options de programmation d'une calculatrice programmable. L'utilisation d'une calculatrice graphique ou des options de programmation d'une calculatrice peut entraîner votre disqualification.

(2) Formulaires (jointes au sujet).

(3) Dictionnaire hébreu-langue étrangère / langue étrangère-hébreu.

ד. Instructions supplémentaires :

(1) Ne recopiez pas la question, indiquez seulement son numéro.

(2) Commencez chaque question sur une nouvelle page.

Écrivez dans le cahier d'examen les étapes de la résolution, même lorsque les calculs se font à l'aide de la calculatrice.

Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, en détail et de façon claire et ordonnée.

Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

(3) Pour vos brouillons, utilisez le cahier d'examen.

L'utilisation d'autres feuilles de brouillon peut entraîner votre disqualification.

מתמטיקה
5 יחידות לימוד - שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות

$20 \times 2 = 40$ נקודות

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור

$20 \times 1 = 20$ נקודות

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

של פולינומים, של פונקציות שורש,

של פונקציות רציונליות

ושל פונקציות טריגונומטריות

$20 \times 2 = 40$ נקודות

סה"כ — 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

(3) מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים,

בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה.

שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

Bonne chance!

בהצלחה!

Questions

Attention ! Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, de manière détaillée et claire.
Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Première partie – Algèbre et probabilités (40 points)

Répondez à deux des questions 1-3 (20 points par question).

Attention ! Si vous répondez à plus de deux questions, seules les deux premières réponses de votre copie seront corrigées.

1. Un village de vacance comporte deux piscines : la piscine 'א et la piscine 'ב .

Le volume de la piscine 'א est V_1 et le volume de la piscine 'ב est V_2 .

On remplit les piscines au moyen de quatre tuyaux ayant le même débit.

Un jour donné, les deux piscines étaient vides.

On a commencé à remplir la piscine 'א au moyen des quatre tuyaux. Lorsque la piscine 'א a été remplie au $\frac{1}{6}$ de son volume, on a transféré l'un des tuyaux vers la piscine 'ב et l'on a commencé à la remplir avec ce tuyau. Lorsque la piscine 'א a été remplie à moitié, on a transféré deux autres tuyaux à la piscine 'ב pour la remplir.

Le remplissage des deux piscines s'est achevé en même temps.

Tous les tuyaux ont fourni de l'eau continuellement jusqu'à ce que les deux piscines soient remplies.

Calculez le rapport $\frac{V_1}{V_2}$.

2. a_n est une suite arithmétique dont la raison, d , est différente de 0.

On donne : $a_7 = -a_{17}$.

א. Déterminez a_{12} .

- ב. (1) Existe-t-il dans cette suite un terme dont la valeur est égale à $-a_1$? Justifiez.
(2) Déterminez un nombre entier naturel n pour lequel la somme des n premiers termes de la suite est égale à 0.
- ג. Existe-t-il un nombre entier n vérifiant : $a_n \cdot a_{n+1} < 0$?
Si oui — déterminez un n de ce type, si non — justifiez.
- ד. Est-il possible de savoir combien de termes négatifs comporte cette suite ? Justifiez (distinguez différents cas).

3. Mikhal possède un dé équilibré. Le nombre 2 est inscrit sur trois des faces du dé et le nombre 4 est inscrit sur les trois autres faces.

Galit possède un autre dé équilibré. Sur chacune des faces du dé de Galit est inscrit l'un de ces nombres : 1 ou 3.

Mikhal et Galit jouent une partie comportant cinq tours. La participante qui remporte le plus de tours gagne la partie. À chaque tour de la partie, chacune d'elles lance son dé une fois. La gagnante du tour est la participante sur le dé de laquelle est obtenu le nombre le plus grand.

Il est donné que sur un tour unique, la probabilité que Mikhal batte Galit est de $\frac{7}{12}$.

- א. Sur combien de faces du dé de Galit est inscrit le nombre 1 ? Justifiez votre réponse.
- ב. Quelle est la probabilité que Galit remporte la partie ?
- ג. Quelle est la probabilité que Galit remporte la partie si l'on sait qu'elle a remporté le premier tour ?

Deuxième partie – Géométrie et trigonométrie planes (20 points)

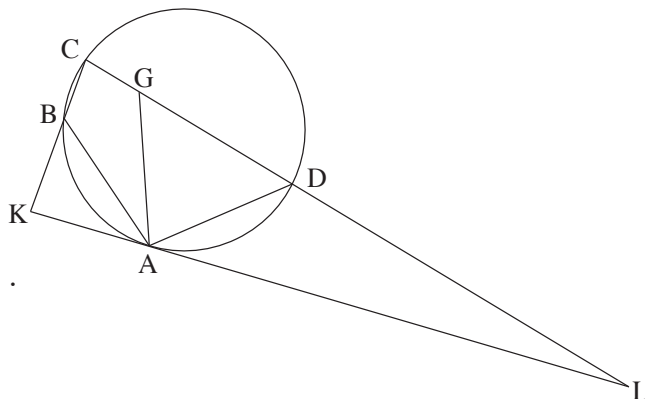
Répondez à l'une des questions 4-5 .

Attention ! Si vous répondez à plus d'une question, seule la première réponse de votre copie sera corrigée.

4. Le quadrilatère ABCD est inscrit dans un cercle.

Un point G se trouve sur le côté CD de sorte que $AB = AG$ et que $CB = CG$.

La tangente au cercle au point A coupe le prolongement du côté CD en un point L , et coupe le prolongement du côté CB en un point K (voir figure).



א. Démontrez que $AD = AG$.

ב. (1) Démontrez que $\triangle ABK \sim \triangle CDA$.

(2) Démontrez que $AD^2 = BK \cdot CD$.

ג. Montrez que $\frac{S_{\triangle LDA}}{S_{\triangle KAB}} = \frac{LA}{AK}$.

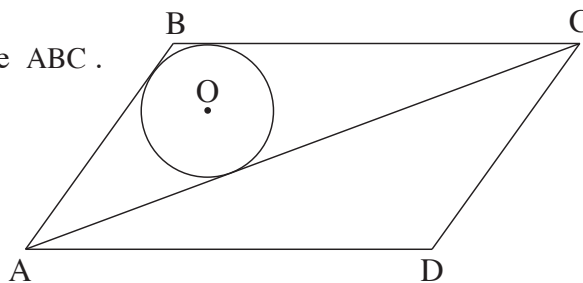
5. Soit un parallélogramme ABCD . AC est la plus longue des diagonales, tel que représenté sur la figure.

Un cercle de centre O est inscrit dans le triangle ABC .

Donnée : le point O se trouve respectivement à

des distances de 6 et de 3 des droites AD et AC ;

$OA = 10$.



א. Calculez les mesures des angles du parallélogramme.

ב. Calculez la longueur de la diagonale AC .

ג. Calculez l'aire du parallélogramme.

**Troisième partie – Calcul différentiel et intégral de polynômes,
de fonctions racines, de fonctions rationnelles
et de fonctions trigonométriques (40 points)**

Répondez à deux des questions 6-8 (20 points par question).

Attention ! Si vous répondez à plus de deux questions, seules les deux premières réponses de votre copie seront corrigées.

6. Soit les fonctions $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$, $g(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$.

Répondez au paragraphe $\aleph$ pour l'intervalle $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$.

- $\aleph$. (1) Déterminez le domaine de définition de la fonction $f(x)$.
- (2) Déterminez les équations des asymptotes de la fonction $f(x)$ qui sont perpendiculaires à l'axe des abscisses.
- (3) Déterminez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction $f(x)$ (s'il en existe).
- (4) Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.

Répondez également au paragraphe $\beth$ pour l'intervalle $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$.

- $\beth$. (1) Déterminez le domaine de définition de la fonction $g(x)$.
- (2) Démontrez : $g(x) = -f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.
- (3) Tracez une esquisse du graphe de la fonction $g(x)$.

Vous pouvez vous aider de vos réponses aux paragraphes précédents.

- $\aleph$. Déterminez la valeur de l'expression $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$. Justifiez votre réponse.

7. Soit l'ensemble des fonctions $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2 - a}$. a est un paramètre, $a \neq 0$, $a \neq 4$.

Répondez au paragraphe א. Exprimez en fonction de a si besoin. Distinguez entre $a > 0$ et $a < 0$ si besoin.

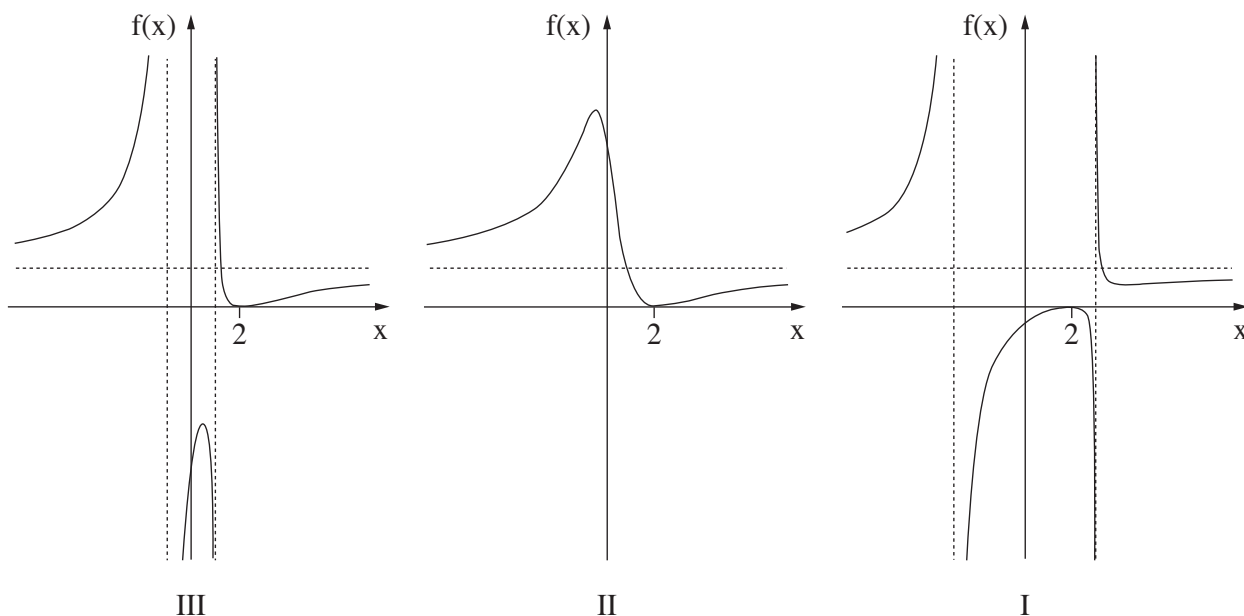
- א. (1) Déterminez le domaine de définition de la fonction $f(x)$.
(2) Déterminez les coordonnées des points d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ avec les axes.
(3) Déterminez l'équation de l'asymptote de la fonction $f(x)$, parallèle à l'axe des abscisses.
(4) Déterminez les équations des asymptotes de la fonction $f(x)$, perpendiculaires à l'axe des abscisses (s'il en existe).

Répondez au paragraphe ב. Exprimez en fonction de a si besoin. Distinguez entre $a > 4$ et $a < 4$ si besoin.

- ב. Déterminez les coordonnées des points d'extremum de la fonction $f(x)$, puis déterminez leur type.
ג. Voici trois graphes possibles de la fonction $f(x)$, chacun est donné pour une valeur différente de a .

Déterminez l'intervalle des valeurs de a correspondant à chacun des graphes I-III.

Justifiez votre réponse.



8. Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{x^3}$.

On a tracé une tangente au graphe de la fonction $f(x)$ au point où $x = t$.

Donnée : $1 \leq t \leq 5$.

La tangente coupe l'axe des abscisses en un point A et l'axe des ordonnées en un point B.

Le point O est l'origine du repère.

- א. Déterminez l'abscisse du point de tangence pour laquelle la somme des longueurs des deux côtés perpendiculaires du triangle AOB est minimale.
- ב. Déterminez l'abscisse du point de tangence pour laquelle la somme des longueurs des deux côtés perpendiculaires du triangle AOB est maximale.

Bonne chance!

Tous droits réservés à l'État d'Israël.
Toute copie ou publication est interdite sans l'autorisation du
Ministère de l'Éducation.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך