

Mathématiques

Conformément au programme de la réforme
pour un apprentissage enrichissant

Premier questionnaire – 5 unités d'étude

Instructions au candidat

- א. Durée de l'examen : trois heures et demie.
- ב. Structure du questionnaire et barème de notation :
Ce questionnaire comporte trois parties.
- Première partie — Algèbre et probabilités
 $2 \times 20 = 40$ points
- Deuxième partie — Géométrie et trigonométrie planes
 $1 \times 20 = 20$ points
- Troisième partie — Calcul différentiel et intégral des polynômes, des fonctions racine, des fonctions rationnelles, et des fonctions trigonométriques
 $2 \times 20 = 40$ points
Total — 100 points
- ג. Matériel auxiliaire autorisé :
- (1) Calculatrice non graphique. Il est interdit d'utiliser les options de programmation d'une calculatrice programmable.
L'utilisation d'une calculatrice graphique ou des options de programmation d'une calculatrice peut entraîner votre disqualification.
- (2) Formulaires (jointes au sujet).
- (3) Dictionnaire hébreu-langue étrangère / langue étrangère-hébreu.
- ד. Instructions particulières :
- (1) Ne recopiez pas la question, indiquez seulement son numéro.
- (2) Commencez chaque question sur une nouvelle page. Écrivez dans le cahier d'examen les étapes de votre raisonnement, même lorsque les calculs se font à l'aide de la calculatrice.
Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, en détail et de façon claire et ordonnée.
Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.
- (3) Pour vos brouillons, utilisez le cahier d'examen.
L'utilisation d'autres feuilles de brouillon peut entraîner votre disqualification.

Bonne chance!

מתמטיקה

על פי הרפורמה ללמידה משמעותית

שאלון ראשון מ-5 יחידות לימוד

הוראות לנבחן

- א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:
בשאלון זה שלושה פרקים.
פרק ראשון — אלגברה והסתברות
 $20 \times 2 = 40$ נקודות
- פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור
 $20 \times 1 = 20$ נקודות
- פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות
 $20 \times 2 = 40$ נקודות
סה"כ — 100 נקודות
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).
- (3) מילון עברי-לועזי / לועזי-עברי.
- ד. הוראות מיוחדות:
- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
- (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
- (3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

בהצלחה!

Questions

Attention ! Expliquez toutes vos opérations, y compris les calculs, de manière détaillée et claire.

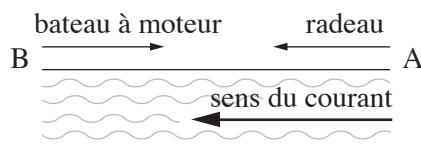
Un manque de détails peut entraîner une baisse de la note ou votre disqualification.

Première partie – Algèbre et probabilités (40 points)

Répondez à deux des questions 1-3 (20 points par question).

Attention ! Si vous répondez à plus de deux questions, seules les deux premières réponses de votre copie seront corrigées.

1. Les villages A et B se situent sur la rive d'un fleuve dont la vitesse du courant est constante. Le sens du courant est de A vers B .



Un bateau à moteur est parti du village B vers le village A .

Ce bateau a navigué à contre-courant.

Au même moment, un radeau part du village A vers le village B .

Le radeau a navigué dans le sens du courant.

La vitesse du bateau à moteur en eau stagnante est constante et est 4 fois plus élevée que celle du courant du fleuve.

La vitesse du radeau en eau stagnante est nulle. En eau vive, le radeau navigue dans le sens du courant.

Le bateau et le radeau se sont rencontrés 3 heures et 45 minutes après leur départ, puis ont poursuivi leur parcours. Le bateau à moteur a atteint le village A , puis a immédiatement fait demi-tour et a navigué de retour vers le village B .

Lorsque le bateau à moteur a atteint le village B , le radeau se situait à une distance de 35 km du village B .

- א. Calculez la vitesse du courant ainsi que la vitesse du bateau à moteur en eau stagnante.

- ב. En revenant vers le village B , le bateau à moteur a rencontré le radeau une deuxième fois.

Combien de temps s'est écoulé depuis l'instant où le radeau a quitté le village A jusqu'à ce que le bateau et le radeau se rencontrent pour la deuxième fois ?

/suite en page 3/

2. Soit une suite de terme général a_n .

On note S_n la somme des n premiers termes de la suite a_n .

Soit : $S_n = k - \frac{1}{3^{n+1}}$ pour tout n entier naturel. k est un nombre constant.

א. Exprimez a_1 ainsi que le terme général a_n pour $1 < n$ en fonction de n et de k si nécessaire.

ב. Déterminez k pour lequel la suite a_n est une suite géométrique. Justifiez.

On définit : $T = a_2^2 + a_5^2 + a_8^2 + \dots$ (la somme des carrés des termes de la suite a_n en allant de trois en trois et en partant de a_2).

ג. Calculez T .

3. La boîte I contient 10 boules, certaines sont bleues et les autres sont rouges, et la boîte II contient 7 boules bleues et 3 boules rouges.

On tire au hasard une boule de la boîte I . Si c'est une boule rouge, on la transfère dans la boîte II .

Si c'est une boule bleue, on la replace dans la boîte I .

On tire à nouveau au hasard une boule de la boîte I , puis à nouveau, si c'est une boule rouge, on la transfère dans la boîte II et si c'est une boule bleue, on la replace dans la boîte I .

On tire ensuite au hasard une boule de la boîte II .

- א. Il est donné que la probabilité qu'au terme de deux tirages de la boîte I , une seule boule rouge soit transférée de la boîte I vers la boîte II , est de $\frac{19}{36}$.

Calculez le nombre de boules bleues que contenait la boîte I avant le premier tirage.

Répondez aux articles ג-ב pour le nombre de boules bleues que vous avez déterminé à l'article א.

- ב. Quelle est la probabilité que la boule tirée de la boîte II soit une boule rouge ?
- ג. On sait que la boule tirée de la boîte II est une boule rouge.
Quelle est la probabilité qu'après avoir tiré cette boule rouge de la boîte II , il y reste exactement trois boules rouges ?

Deuxième partie – Géométrie et trigonométrie planes (20 points)

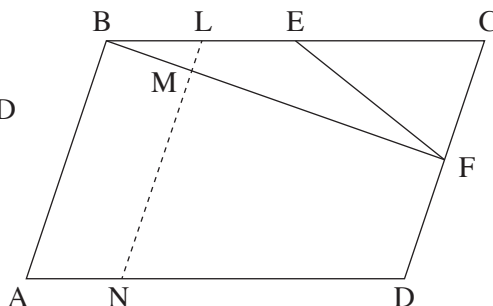
Répondez à l'une des questions 4-5 .

Attention ! Si vous répondez à plus d'une question, seule la première réponse de votre copie sera corrigée.

4. Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

L'angle A est un angle aigu.

Le point E est le milieu du côté BC
 et le point F est le milieu du côté CD
 (voir figure).



- א. L'aire du triangle ECF est S .

Exprimez l'aire du
 parallélogramme ABCD
 en fonction de S . Justifiez votre réponse.

- ב. Le point L est le milieu du segment BE .

On fait passer une droite parallèle à AB passant par L qui coupe BF et AD respectivement aux points M et N .

Calculez le rapport $\frac{LM}{MN}$.

- ג. On donne $BE = EF$.

Est-il possible d'inscrire le quadrilatère ABFD dans un cercle ?
 Justifiez votre réponse.

5. ABCD est un trapèze inscrit dans un cercle ($AB \parallel DC$).

Données : $AB = a$, $CD = b$ ($a < b$) .

$\angle C = 60^\circ$.

- א. Exprimez les côtés BC et AD du trapèze, en fonction de a et b .

Données : $a = 4$, la longueur de la diagonale BD est $4\sqrt{7}$.

- ב. Calculez b .

- ג. (1) R est le rayon du cercle circonscrit au trapèze. Déterminez R .

(2) Expliquez pourquoi il est possible d'inscrire un cercle dans le trapèze ABCD .

(3) r est le rayon du cercle inscrit dans le trapèze. Déterminez r .

Troisième partie – Calcul différentiel et intégral des polynômes, des fonctions racines, des fonctions rationnelles et des fonctions trigonométriques (40 points)

Répondez à deux des questions 6-8 (20 points par question).

Attention ! Si vous répondez à plus de deux questions, seules les deux premières réponses de votre copie seront corrigées.

6. Soit la fonction : $f(x) = a - \frac{2}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}$. a est un paramètre .

Répondez à l'article α . Exprimez votre réponse en fonction de a si nécessaire.

- α . (1) Déterminez le domaine de définition de la fonction $f(x)$.
 (2) Déterminez les équations des asymptotes perpendiculaires aux axes.
 (3) Déterminez les coordonnées des points d'extremum de la fonction $f(x)$ (s'il en existe), puis déterminez leur type.
 (4) Déterminez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction $f(x)$.

Il est donné que le graphe de la fonction $f(x)$ est tangent à l'axe des abscisses.

β . Déterminez a .

Substituez la valeur de a que vous avez déterminée, puis répondez aux articles γ - τ .

γ . Tracez une esquisse du graphe de la fonction $f(x)$.

τ . Soit la fonction $g(x) = |f(x) + k|$.

On sait que le graphe de la fonction $g(x)$ est tangent à l'asymptote horizontale du graphe de la fonction $f(x)$.

Déterminez k (déterminez les deux possibilités). Justifiez votre réponse.

7. Voici les graphes des fonctions $f(x)$ et $f'(x)$.

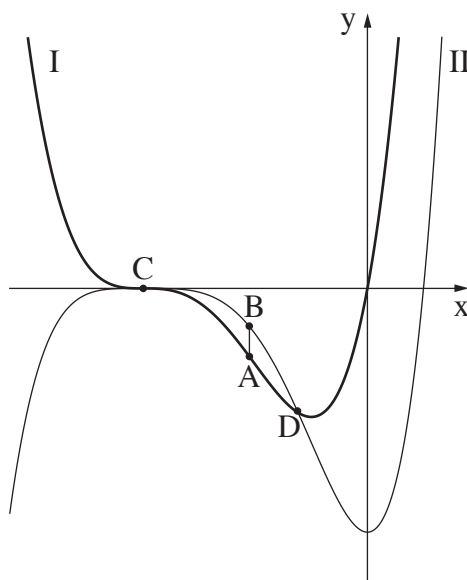
- א. Faites correspondre les graphes I et II avec les fonctions $f(x)$ et $f'(x)$. Justifiez.

Données : $f'(x) = x(x + b)^3$.

$b > 1$ est un paramètre.

Le graphe de la fonction $f(x)$ possède un point d'inflexion en $x = -1$.

- א. Déterminez b .



C et D sont les points d'intersection des fonctions $f(x)$ et $f'(x)$

sur l'intervalle $x < 0$, tel que décrit sur la figure.

Les points A et B se situent respectivement sur les graphes I et II, de sorte que la droite AB est perpendiculaire à l'axe des abscisses.

Données : $x_C < x_A < x_D$,

$$x_C = -4,$$

$$x_D = 1 - \sqrt{5}.$$

- א. Déterminez l'abscisse des points A et B pour laquelle la longueur du segment AB est maximale (il est possible de résoudre cet article sans déterminer la fonction $f(x)$).

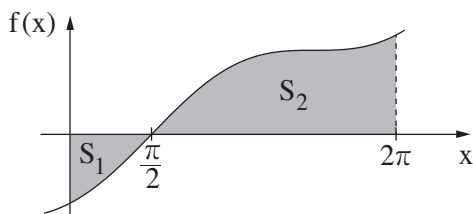
8. $f(x)$ est une fonction définie pour tout x .

Le graphe de la fonction $f(x)$ coupe l'axe des ordonnées dans sa partie négative.

L'unique point d'intersection du graphe de la fonction $f(x)$ avec l'axe des abscisses est $(\frac{\pi}{2}, 0)$ (voir figure).

Donnée : l'aire délimitée par le graphe de la fonction $f(x)$, par les axes et par la droite $x = 2\pi$ (l'aire grise sur la figure) vaut $10\pi^2 + 16$.

On donne également : $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 8\pi^2$.



א. Déterminez l'aire délimitée par le graphe de la fonction $f(x)$ et par les axes (l'aire S_1 désignée sur la figure).

La fonction $F(x)$ est la fonction primitive de la fonction $f(x)$.

Donnée : $F(0) = 0$.

ב. Déterminez $F(\frac{\pi}{2})$.

Donnée : $f'(x) = 8 \sin x + 8$.

ג. Déterminez $f(x)$.

Bonne chance!

Tous droits réservés à l'État d'Israël.
 Toute copie ou publication est interdite sans l'autorisation du
 Ministère de l'Éducation.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
 אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך