

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	20×2	—	40 נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה				
פרק שלישי	—	במישור				
	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי				
		של פולינומים, של פונקציות שורש,				
		של פונקציות רציונליות				
		ושל פונקציות טריגונומטריות	—	20×2	—	40 נקודות
			—	סה"כ	—	100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
- (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
- הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
- (3) לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מן המשגיחים. שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

המשך מעבר לדף ◀

השאלות

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מן השאלות 1-3 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. נגה רכבה על אופניים במסלול באורך מסוים, בארבע מהירות קבועות שונות.
בכל פעם, לאחר שעברה מקטע שאורכו רבע מן המסלול, היא הגבירה את מהירותה, ורכבה במהירות הגדולה פי 2 מן המהירות הקודמת.
במקטע האחרון היא רכבה במהירות של 40 קמ"ש.
נגה יצאה לדרך בשעה 8:00 בבוקר וסיימה את המסלול בשעה 11:45 בבוקר.
א. מהו אורך המסלול?
ב. דניאל יצא לדרך באותו מסלול בשעה 9:45, ונסע במהירות קבועה לאורך כל המסלול.
גם הוא הגיע לסוף המסלול בשעה 11:45.
באיזה מארבעת מקטעי המסלול פגש דניאל את נגה בפעם הראשונה, ובאיזו שעה?

2. נתונה הסדרה $a_n = \frac{(2^n + 1)(2^n - 1)}{2^n}$.

b_n ו- c_n הן סדרות הנדסיות שכל איבריהן חיוביים, המקיימות לכל n טבעי: $a_n = b_n - c_n$.

נתון: $b_6 = 64$, $c_3 = \frac{1}{8}$.

א. (1) מצא את b_1 ואת המנה של הסדרה b_n .

(2) מצא את c_1 ואת המנה של הסדרה c_n .

את סכום n האיברים הראשונים בסדרה a_n נסמן ב- A_n ,

את סכום n האיברים הראשונים בסדרה b_n נסמן ב- B_n ,

ואת סכום n האיברים הראשונים בסדרה c_n נסמן ב- C_n .

ב. הראה ש- $C_n = B_n - A_n$.

ג. עבור אילו ערכי n מתקיים האי-שוויון: $0.9 < B_n - A_n < 1$?

3. בבית אבות גדול יש לכמה מן הדיירים קלנועית, ולשאר אין.

אם בוחרים באקראי 9 דיירים מבית האבות הזה, ההסתברות של- 4 מהם בדיוק

יש קלנועית גדולה פי 24 מן ההסתברות של- 6 מהם בדיוק יש קלנועית.

א. מהי ההסתברות שלדייר שנבחר באקראי יש קלנועית?

ב. בוחרים באקראי 6 דיירים מבית האבות. ידוע שלפחות ל- 3 מהם יש קלנועית.

מהי ההסתברות של- 4 מהם בדיוק יש קלנועית?

ג. בוחרים באקראי דיירים מבית האבות, בזה אחר זה, עד של- 3 מהם בדיוק יש קלנועית.

מהי ההסתברות שייבחרו בדרך זו בדיוק 6 דיירים?

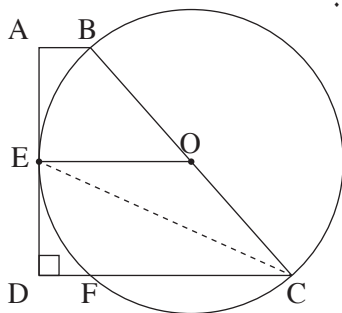
פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מן השאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4. נתון מעגל שמרכזו O.

ABCD הוא טרפז ישר זווית ($\angle ADC = 90^\circ$, $AB \parallel DC$).



הצלע AD משיקה למעגל בנקודה E,

והנקודות B ו-C נמצאות על המעגל כך ש-BC הוא קוטר.

הצלע DC חותכת את המעגל בנקודה F, כמתואר בציור.

א. הוכח: $\angle BCD = 2\angle DEF$.

ב. הוכח: $\triangle ABE \cong \triangle DFE$.

ג. הוכח: $BC = DF + DC$.

5. ABC הוא משולש שווה שוקיים ($AB = BC$).

AF, CE ו-BD הם תיכונים במשולש,

הנחתים בנקודה O (ראה ציור).

א. הוכח: $S_{\triangle BOE} = S_{\triangle COD}$.

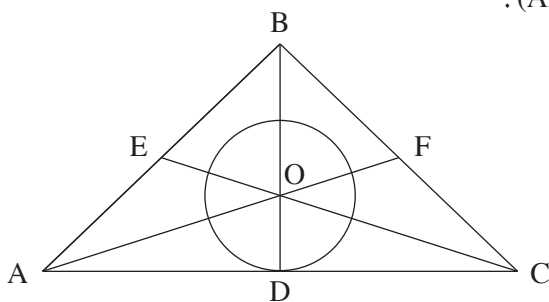
מעגל שמרכזו O משיק לצלע AC

בנקודה D.

נתון כי שטח העיגול שווה לשטח המשולש AOC.

ב. חשב את גודל הזווית ACE.

ג. הבע את אורך הקטע OE באמצעות רדיוס המעגל.



פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,**של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות****ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)**

ענה על שתיים מן השאלות 6-8 (לכל שאלה – 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x-5}{\sqrt{x^2-10x+24}}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(4) מצא את את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x) = f(x+5)$.

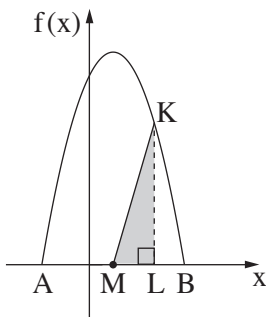
ב. (1) הוכח ש- $g(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ג. הסבר מדוע לכל $1 < a < b$ מתקיים השוויון: $\int_a^b g(x) dx = \int_{a+5}^{b+5} f(x) dx$.

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$.

- א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 (2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.
 (3) מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $f(x)$.
 (4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).
 ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.
 ג. נתון: $0 < a < \frac{\pi}{2}$.
 השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, הישר $x = a$ וציר ה- x שווה ל-1.
 מצא את a .



8. בצויר שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x) = -x^2 + 2x + c$ בתחום האי-שליליות שלה.
 A ו- B הן נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .
 נתון: $x_B = 2t$, $x_A = -t$ ($t > 0$).
 א. מצא את t ואת c .
 M היא נקודת החיתוך של ציר הסימטריה של הפרבולה עם ציר ה- x .
 K היא נקודה כלשהי על גרף הפונקציה $f(x)$ מעל לציר ה- x .
 מהנקודה K הורידו אנך לציר ה- x , החותך את הקטע AB בנקודה L.
 ב. מצא עבור אילו שיעורי x של הנקודה K שטח המשולש KLM הוא מקסימלי.
 מצא את שני הפתרונות האפשריים.
 תוכל להשאיר שורש בתשובתך.

בהצלחה!