

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	—	אלגברה והסתברות	—	20×2	—	40 נקודות
פרק שני	—	גאומטריה וטריגונומטריה				
במישור	—		—	20×1	—	20 נקודות
פרק שלישי	—	חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי	—	20×2	—	40 נקודות
	—	סה"כ	—			100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
- שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
- (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
- הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
- חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
- (3) לטייטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
- שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

השאלות

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. שני צינורות א' ו-ב' מזרימים מים לבִּרְכָה בקצב קבוע.

כאשר צינור א' בלבד פתוח, הבִּרְכָה הריקה מתמלאת לגמרי ב־ m שעות.

כאשר צינור ב' בלבד פתוח, הבִּרְכָה הריקה מתמלאת לגמרי ב־ $2m$ שעות.

כאשר שני הצינורות פתוחים במקביל, הבִּרְכָה הריקה מתמלאת לגמרי ביותר מ־ 4 שעות.

ביום מסוים הבִּרְכָה הייתה ריקה. פתחו את צינור א' בלבד למשך שעתיים.

אחר כך פתחו גם את צינור ב', ושני הצינורות היו פתוחים בו בזמן שעתיים נוספות.

בתום אותן שעתיים נוספות יותר מ־ $\frac{1}{2}$ הבִּרְכָה הייתה מלאה.

א. מצא את תחום הערכים האפשריים של m .

ב. ביום אחר $\frac{1}{2}$ הבִּרְכָה הייתה מלאה. פתחו את שני הצינורות, אלא שבשל תקלה טכנית

צינור ב' רוקן מים מן הבִּרְכָה במקום למלא בה מים. שני הצינורות היו פתוחים בו בזמן

במשך שעה אחת, ובמהלכה צינור א' מילא מים בבִּרְכָה וצינור ב' רוקן ממנה מים.

בתום אותה שעה תוקנה התקלה, ושני הצינורות החלו למלא את הבִּרְכָה יחד, עד שהיא

התמלאה לגמרי כעבור שעתיים וחצי נוספות.

נתון שהקצב שבו צינור ב' מרוקן מים מהבִּרְכָה שווה לקצב שבו הוא ממלא אותה במים.

מצא את m .

2. נתונה סדרה a_n המקיימת את כלל הנסיגה: $a_1 = -1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{4 \cdot a_n + 3}$.

נגדיר סדרה חדשה b_n : $b_n = \frac{1}{a_n} + 2$.

א. הוכח כי b_n היא סדרה הנדסית.

ב. הבע באמצעות n את הסכום: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$.

ג. נתון: n הוא מספר זוגי.

הבע באמצעות n את הסכום: $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}$.

3. אביגיל משתתפת במשחק של זריקת חצים למטרה.

הסיכוי שלה לפגוע במטרה בניסיון בודד הוא P ($P > 0$), ואינו תלוי בניסיונותיה הקודמים.

כל משתתף זורק 5 זריקות רצופות.

הסיכוי של אביגיל לפגוע במטרה בארבע זריקות מתוך החמש גדול פי 3 מן הסיכוי שלה לפגוע

בה בכל חמש הזריקות.

א. מצא את P .

משתתף מנצח במשחק אם מתוך 5 זריקות רצופות, מספר הפגיעות שלו במטרה גדול ממספר

ההחטאות שלו (יכול להיות יותר ממנצח אחד במשחק).

ב. מהי ההסתברות שאביגיל תנצח במשחק?

ג. (1) אם אביגיל תחטיא את המטרה בזריקה השנייה, מהי ההסתברות שהיא תנצח

במשחק?

(2) גם תמר משתתפת במשחק, וגם הסיכוי שלה לפגוע במטרה בניסיון בודד שווה ל- P

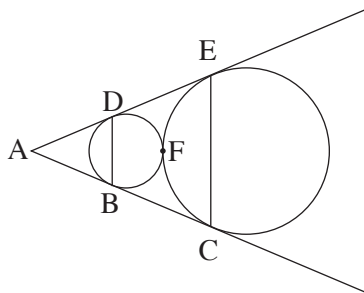
ואינו תלוי בניסיונותיה הקודמים. תמר תחטיא בזריקה הראשונה.

מה ההסתברות שהיא תנצח במשחק?

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.



4. נתונים שני מעגלים בעלי רדיוס שונה,

המשיקים זה לזה מבחוץ בנקודה F.

AC משיק לשני המעגלים בנקודות B ו-C,

AE משיק לשני המעגלים בנקודות D ו-E,

כמתואר בצירוף.

א. הוכח שהמרובע BDEC הוא טרפז שווה שוקיים.

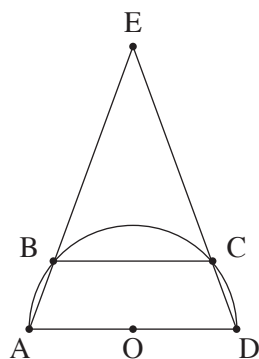
ב. המשיק המשותף למעגלים העובר בנקודה F חותך את

שוקי הטרפז, BC ו-DE, בנקודות G ו-H בהתאמה.

הוכח: GH הוא קטע אמצעים בטרפז.

ג. נסמן ב-R את רדיוס המעגל הגדול וב-r את רדיוס המעגל הקטן.

הוכח כי $R \cdot BD = r \cdot CE$.



5. נתון טרפז ABCD ($BC \parallel AD$)

החסום בחצי מעגל שמרכזו O ורדיוסו R

כך ש-AD הוא קוטר של חצי המעגל.

המשכי השוקיים AB ו-DC נפגשים

מחוץ למעגל בנקודה E (ראה ציור).

נתון: $\angle EAD = \alpha$.

א. הבע באמצעות R ו- α את אורך הקטע BC.

ב. מהו התחום של כל הערכים האפשריים עבור הזווית α ? נמק.

ג. נתון כי שטח משולש AED גדול פי 9 משטח משולש COD.

מהו היחס בין רדיוס המעגל החסום את המשולש AED לבין R?

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה — 20 נקודות).
שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^2 + 4x}{x^2 + 3x + b}$.

a ו- b הם פרמטרים.

נתון: $x = 1$, $y = 1$ הן אסימפטוטות של הפונקציה.

א. מצא את a ואת b.

ב. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) האם יש לפונקציה אסימפטוטות נוספות המאונכות לצירים

(מלבד $x = 1$ ו- $y = 1$)? הסבר.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. עבור אילו ערכי x מתקיים: $|f(x)| = -f(x)$? נמק.

ה. נגדיר $g(x) = f^2(x) \cdot f'(x)$.

הראה כי השטח המוגבל על ידי ציר ה- x, על ידי גרף הפונקציה $g(x)$

ועל ידי הישר $x = 0.5$ הוא $\frac{1}{3}$. נמק את תשובתך.

7. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, a הוא פרמטר.

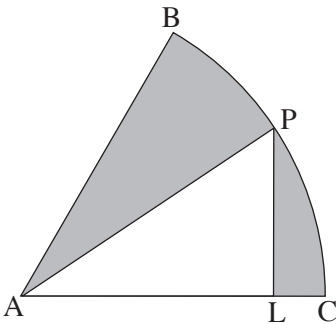
ענה על הסעיפים א-ו עבור $a > 0$. הבע את תשובותיך באמצעות a במידת הצורך.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.
- ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ה. (1) רשום את האסימפטוטות המאונכות לצירים של גרף הנגזרת $f'(x)$.
(2) סרטט סקיצה של גרף הנגזרת $f'(x)$.

ו. מצא את ערך הביטוי: $\int_{2a}^{3a} f(x) dx + \int_{-3a}^{-2a} f(x) dx$.

ענה על סעיף ז עבור $a = 0$.

- ז. (1) מצא את תחום ההגדרה של $f(x)$.
- (2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.



8. נתונה גזרת עיגול BAC שהיא $\frac{1}{6}$ מעיגול שרדיוסו R ומרכזו A.

מנקודה כלשהי P, הנמצאת על הקשת BC,

הורידו אנך ל-AC החותך את הרדיוס AC בנקודה L

(ראה ציור).

השטח האפור שבציור הוא השטח הכלוא בין הקשת BC

ובין הרדיוסים AB ו-AP, והקטעים LP ו-LC.

נתון שהשטח האפור המינימלי הוא $24\pi - 36$.

א. (1) מצא את הזווית PAC שעבורה

השטח האפור שמתקבל הוא מינימלי.

(2) מצא את R.

ב. מהו השטח המקסימלי של המשולש APL ? נמק.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך