

אלגברה לינארית

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: ארבע שעות.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים.

פרק ראשון 64 נקודות

פרק שני 36 נקודות

סה"כ 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר לשימוש: 1. כל חומר עזר כתוב בכתב-יד או מודפס על נייר.

2. מחשבון פשוט שאינו ניתן לתכנות.

ד. הוראות מיוחדות:

1. את התשובות לכל השאלות יש לרשום **אך ורק** על גבי דף התשובות שבנספח א'.

2. לנוחותך, לשאלון זה מצורף מילון מונחים בשפות עברית, ערבית, אנגלית ורוסית. תוכל

להיעזר בו בעת הצורך.

הוראות למשגיח:

בתום הבחינה יש לוודא שהנבחנים הדביקו את מדבקת הנבחן שלהם במקום המיועד לכך בדף התשובות שבנספח א' וצירפו אותו למחברת הבחינה.

בשאלון זה 22 עמודים ו-4 עמודי נספחים.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר,

אך מכוונות הן לנבחנות והן לנבחנים.

בהצלחה!

המשך מעבר לדף

השאלות

פרק ראשון (64 נקודות)

ענה על ארבע מבין השאלות 1-5 (לכל שאלה – 16 נקודות).
בכל אחת מן השאלות 1-5 נתונים חמישה סעיפים, א'-ה', שאינם תלויים זה בזה.
בכל סעיף נתונות ארבע תשובות, שרק אחת מהן נכונה. בכל סעיף בחר את התשובה הנכונה, והקף בעיגול את הספרה המייצגת אותה בדף התשובות שבנספח.
בשאלות שבחרת לענות עליהן, ענה על כל הסעיפים.
הדבק את מדבקת הנבחן שלך במקום המיועד לכך בדף התשובות, והדק אותו למחברת הבחינה.

שאלה 1

הסעיפים א'-ד' מתייחסים לנתונים שלהלן:

נתונה מערכת המשוואות: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ k^2 - 4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & 8 \\ 0 & 0 & 2k-4 \end{pmatrix} \quad \text{עבור:}$$

א. בעבור אילו ערכים של k יש למערכת הנתונה פתרון יחיד?

1. בעבור כל k השונה מ-1 ומ-2.
2. בעבור כל k השונה מ-1 בלבד.
3. בעבור כל k השונה מ-2 בלבד.
4. לא קיים ערך של k שעבורו יש למערכת הנתונה פתרון יחיד.

ב. בעבור אילו ערכים של k יהיו למערכת הנתונה אינסוף פתרונות?

1. בעבור k השווה ל-1 בלבד.
2. בעבור k השווה ל-1 או k השווה ל-2.
3. בעבור כל k השונה מ-1 ומ-2.
4. לא קיים ערך של k שעבורו יהיו למערכת הנתונה אינסוף פתרונות.

ג. בעבור אילו ערכים של k אין למערכת הנתונה אף פתרון?

1. בעבור k השווה ל-1 בלבד.
2. בעבור k השווה ל-2 בלבד.
3. לא קיים ערך של k שעבורו אין למערכת הנתונה אף פתרון.
4. בעבור כל k השונה מ-1.

ד. אם נתון כי למערכת יש פתרון יחיד, בעבור אילו ערכים של k ערכו של y יהיה (-4) ?

1. בעבור k השווה ל-1 בלבד.
2. בעבור k השווה ל-2 בלבד.
3. לא קיים ערך כזה של k .
4. בעבור כל k השונה מ-1 ומ-2.

ה. נתונה מערכת משוואות אי-הומוגנית (M) של שלוש משוואות עם שלושה נעלמים, אשר $(1,2,1)$ ו- $(2,1,1)$ הם פתרונות שלה. כמו כן, נתונה מערכת משוואות הומוגנית (O) אשר $(1,1,1)$ הוא פתרון שלה, ונתון שהיא בעלת אותה מטריצת מקדמים כמו זו של המערכת המקורית.

להלן שני היגדים:

- I. המטריצה של (O) אינה מטריצת האפס, כלומר יש בה לפחות איבר אחד שערכו שונה מ-0.
 - II. $(1, -1, 0)$ הוא פתרון של (O).
- בחר את התשובה הנכונה מבין התשובות שלהלן:

1. היגד II בלבד הוא הנכון.
2. אף אחד מן ההיגדים הללו אינו נכון.
3. היגד I בלבד הוא הנכון.
4. שני ההיגדים הללו נכונים.

שאלה 2

א. נתונות המטריצות:

$$B = \begin{pmatrix} u & v-u & 7 \\ 3a & 2b-3a & -7c \\ v & u-v & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} u & 3a & v \\ v & 2b & u \\ 1 & -c & 0 \end{pmatrix}$$

נתון כי A היא מטריצה לא הפיכה. קבע איזה מבין ההיגדים שלפניך הוא ההיגד הנכון:

1. הדטרמיננטה של B שווה ל-0.

2. הדטרמיננטה של B שונה מ-0.

3. BB^t היא מטריצה הפיכה.

4. AB היא מטריצה הפיכה.

ב. נתונות מטריצות ריבועיות A ו- B . ידוע ש- A היא מטריצה הפיכה ומתקיים

$$AB^2 = 2AB - A$$

קבע איזה מבין ההיגדים שלפניך הוא ההיגד הנכון:

1. B היא מטריצה הפיכה ומתקיים $B^{-1} = -B$.

2. B היא מטריצה הפיכה ומתקיים $B^{-1} = 2I - B$.

3. B היא מטריצה הפיכה ומתקיים $B^{-1} = -2B + 2I$.

4. B היא מטריצה לא הפיכה.

ג. נתונות מטריצות ריבועיות A ו- B מסדר 3×3 .

$$A^{-1}B^tA^3BA^t = 4AB^2, \quad B^3 = I$$

ידוע ש- A היא מטריצה הפיכה, $A^{-1}B^tA^3BA^t = 4AB^2$ ו- $B^3 = I$.
הדטרמיננטה של A היא:

1. ± 1

2. ± 4

3. ± 8

4. ± 2

ד. תהי A מטריצה ריבועית מסדר $n \times n$. למערכת המשוואות $A\bar{x} = A^2(-\bar{x})$ יש לפחות שלושה פתרונות שונים. קבע איזה מבין ההיגדים שלפניך הוא ההיגד הנכון:

1. $\det(A^2 + A) \neq 0$.

2. הדרגה של המטריצה $A + A^2$ שונה מ- n .

3. יש פתרון יחיד למערכות המשוואות ההומוגניות $A\bar{x} = \underline{0}$ ו- $A\bar{x} = -\bar{x}$.

4. המטריצה $A^2 + A^3$ היא הפיכה.

ה. נתונות מטריצות ריבועיות A ו- B . ידוע ש- $A+B=AB$. קבע איזה מבין ההיגדים שלפניך הוא ההיגד הנכון:

1. המטריצה ההופכית של $I-A$ שווה ל- $I-B$.
2. המטריצה $I-A$ אינה הפיכה.
3. המטריצה $I-B$ אינה הפיכה.
4. המטריצה ההופכית של $I-A$ שווה ל- $I-B$.

שאלה 3

כל הסעיפים בשאלה זו מתייחסים למטריצה הזאת: $A = \begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$, כאשר $k \neq 0$.
א. מהי הדטרמיננטה של A^3 ?

1. k^6
2. k^{-6}
3. $-k^9$
4. k^9

ב. בעבור אילו ערכים של k מתקיים כי $AA^t = I = A^tA$?

1. $k = 1$ בלבד.
2. לא קיים k כזה.
3. $k = \pm 1$ בלבד.
4. $k = -1$ בלבד.

ג. בעבור אילו ערכים של k מתקיים כי $AA^3 = A^t$ היא הפיכה?

1. $k = -1$ בלבד.
2. לכל k השונה מאפס.
3. לא קיים k כזה.
4. $k = 1$ בלבד.

ד. נתון כי $k = 2$. קבע בעבור איזה סקלר ממשי t קיים וקטור ממשי $\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \underline{0}$ כך ש- $A\underline{v} = t\underline{v}$.

1. בעבור $t = -2$ בלבד.
2. בעבור $t = 2$ בלבד.
3. בעבור כל ערך של t השונה מאפס.
4. לא קיים t כזה.

ה. יהי m מספר שלם חיובי כלשהו. בעבור אילו ערכים של m תהיה A^m שווה למטריצת האפס?

1. לא קיים m כזה.
2. בעבור כל m זוגי.
3. בעבור כל m אי-זוגי.
4. בעבור כל m .

שאלה 4

הסעיפים א' ו-ב' מתייחסים לטרנספורמציה T , כאשר הטרנספורמציה $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$

מיוצגת על-ידי המטריצה $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, כלומר, לכל $\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ מתקיים $T(\underline{v}) = A \cdot \underline{v}$.

א. קבע איזו מבין הטענות שלהלן היא הטענה הנכונה:

1. $\dim(\text{Ker} T) = 3$ כיוון שהשורות של המטריצה A תלויות לינארית.
2. $\dim(\text{Im} T) = 3$ כיוון שלמערכת $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$ יש אינסוף פתרונות.
3. T היא חד-חד-ערכית ולא על.
4. T היא לא חד-חד-ערכית ולא על.

ב. קבע איזו מבין הטענות שלהלן היא הטענה הנכונה:

1. ארבע השורות של המטריצה A הן בלתי תלויות לינארית.
2. הדרגה של המטריצה AA^t שווה ל-4.
3. קיימים שני וקטורים שונים $\underline{v} \neq \underline{w}$ כך ש- $AA^t \cdot \underline{v} = AA^t \cdot \underline{w}$.
4. לא קיים וקטור $\underline{v} \neq \underline{0}$ כך ש- $AA^t \cdot \underline{v} = \underline{0}$.

הסעיפים ג, ד' ו-ה' מתייחסים לטרנספורמציה T , כאשר הטרנספורמציה $T: R^3 \rightarrow R^3$

מיוצגת על-ידי המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & k \\ 0 & k & k \end{pmatrix}$, כלומר לכל $\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ מתקיים $T(\underline{v}) = A \cdot \underline{v}$.

ג. בעבור אילו ערכים של k יש לטרנספורמציה T בדיוק שני ערכים עצמיים שונים?

1. בעבור כל k ממשי.
2. בעבור $k = -1$ בלבד.
3. בעבור $k = \frac{1}{2}$ או $k = 0$.
4. לא קיים k כזה.

ד. קבע איזה מבין ההיגדים הבאים הוא ההיגד הנכון:

1. קיים k ממשי שעבורו T על.
2. לכל k ממשי T אינה חד-חד-ערכית ואינה על.
3. לכל k ממשי T היא חד-חד-ערכית.
4. קיים k ממשי שעבורו $\dim(ImT) + \dim(kerT) = 2$.

ה. נתון כי- $k = \frac{1}{2}$. קבע איזה מבין ההיגדים הבאים הוא ההיגד הנכון:

1. לא קיים וקטור $\underline{v} \neq \underline{0}$ כך ש- $T(\underline{v}) = \underline{0}$.
2. קיימים שני וקטורים בלתי תלויים לינארית $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ כך ש- $T(\underline{v}_1) = \underline{v}_1$, $T(\underline{v}_2) = \underline{0}$.
3. קיימים שני וקטורים בלתי תלויים לינארית $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2\}$ כך ש- $T(\underline{w}_1) = -T(\underline{w}_2)$ ו- $T(\underline{w}_1) = T(\underline{w}_2)$.
4. לא קיים בסיס B של R^3 המורכב מווקטורים עצמיים של T .

שאלה 5

סעיפים א'-ה' מתייחסים לנתונים שלהלן:

נתונים ארבעה וקטורים $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ בלתי תלויים לינארית במרחב R^4 . נוסף על כך, נתונים שלושה וקטורים $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ ב- R^4 שאפשר לכתוב אותם כקומבינציה לינארית של $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ בצורה הזאת:

$$\underline{x} = \underline{v}_1 - \underline{v}_2 - \underline{v}_3, \quad \underline{y} = \underline{v}_2 - \underline{v}_3 - \underline{v}_4, \quad \underline{z} = \underline{v}_3 - \underline{v}_4$$

א. קבע איזה מבין ההיגדים הבאים הוא ההיגד הנכון.

1. תת-המרחב הנפרש על-ידי $\{\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}\}$ הוא בעל ממד 3.
2. $\{\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}\}$ תלויים לינארית.
3. הקבוצה $\{\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}\}$ מהווה בסיס לתת-המרחב הנפרש על-ידי $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$.
4. הקבוצה $\{\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}\}$ לא מהווה בסיס לתת-המרחב הנפרש על-ידי $\{-\underline{x}, -\underline{y}, -\underline{z}\}$.

ב. הממד של תת-המרחב הנפרש על-ידי $\{\underline{x}, \underline{x} - \underline{y}, \underline{x} + \underline{y}, \underline{x} - 2\underline{y} - 3\underline{z}\}$ שווה ל-

1. 4
2. 3
3. 2
4. 1

ג. קבע איזה מבין ההיגדים הבאים הוא ההיגד הנכון.

1. הווקטורים $\{\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}, \underline{v}_4\}$ תלויים לינארית.
2. הווקטורים $\{\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}, \underline{v}_4\}$ פורשים את המרחב R^4 .
3. לא קיים וקטור $\underline{w}$ השונה מאפס כך שהקבוצה $\{\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}, \underline{w}\}$ פורשת את המרחב R^4 .
4. לכל וקטור $\underline{w}$ השונה מאפס, הקבוצה $\{\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}, \underline{w}\}$ בלתי תלויה לינארית ב- R^4 .

ד. קבע איזה מבין ההיגדים הבאים הוא ההיגד הנכון:

1. קיים סקלר t כך שהקבוצה $\{\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}, \underline{x} + t\underline{z}\}$ מהווה בסיס ל- R^4 .
2. לכל סקלר t הקבוצה $\{\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}, \underline{x} + t\underline{z}\}$ מהווה בסיס ל- R^4 .
3. הווקטורים $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{z}\}$ פורשים את המרחב R^4 .
4. הווקטורים $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ מהווים בסיס למרחב הנפרש על-ידי $\{\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}\}$.

ה. יהי $\underline{w} \neq \underline{0}$ וקטור הניצב לכל אחד מהווקטורים $\underline{x}, \underline{x} - \underline{y}, \underline{x} - 2\underline{y} - 3\underline{z}$. קבע איזה מבין ההיגדים הבאים הוא ההיגד הנכון:

1. מתקיים $\underline{w} = \underline{z}$ בהכרח.
2. קיימים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ אשר לפחות אחד מהם שונה מאפס, כך ש- $\alpha_1 \underline{x} + \alpha_2 \underline{y} + \alpha_3 \underline{z} + \alpha_4 \underline{w} = \underline{0}$.
3. הווקטורים $\{\underline{w}, \underline{x}, \underline{y}, \underline{z}\}$ לא פורשים את כל המרחב R^4 .
4. $\{\underline{w}, \underline{x}, \underline{y}, \underline{z}\}$ מהווה בסיס ל- R^4 .

פרק שני (36 נקודות)

ענה על שתיים מבין השאלות 6–8 (לכל שאלה – 18 נקודות).
בכל אחת מן השאלות 6–8 נתונים סעיפים שאינם תלויים זה בזה. בכל סעיף נתונות ארבע תשובות, שרק אחת מהן נכונה. בכל סעיף בחר את התשובה הנכונה והקף בעיגול את הספרה המייצגת אותה בדף התשובות שבנספח.
בשאלות שבחרת לענות עליהן, ענה על כל הסעיפים.

שאלה 6

בשאלה זו שבעה סעיפים, א'–ז', שאינם תלויים זה בזה. ענה על כל הסעיפים.

סעיפים א'–ז' מתייחסים לבעיה הבאה:

א. נתונה בעיית תכנון לינארי:

$$\max\{z = kx_1 + 6x_2\}$$

בכפוף לאילוצים האלה:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6$$

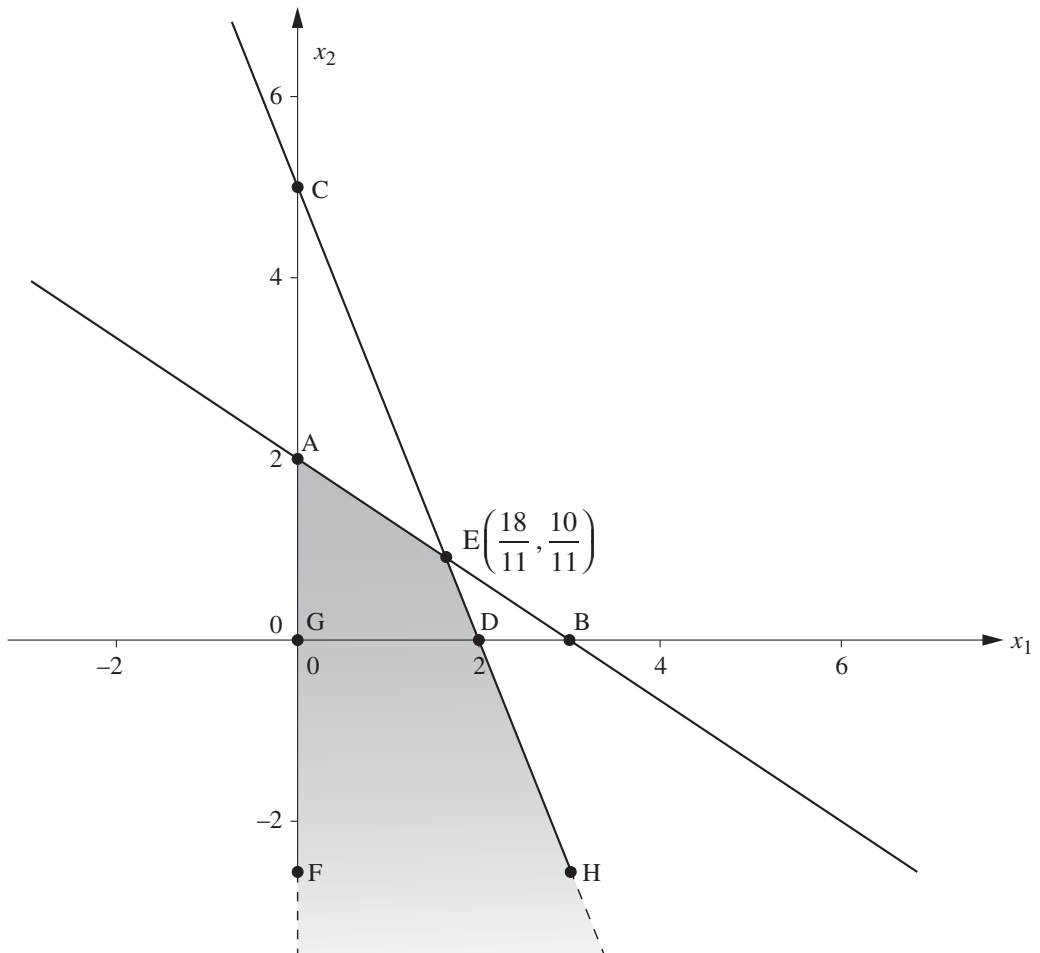
$$5x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$x_1 \geq 0$$

x_2 אינו מוגבל בסימן.

k הוא פרמטר.

לפניך סרטוט של תחום הפתרונות האפשריים של הבעיה הנתונה.



איור לשאלה 6

א. עבור $k = 0$, קבע איזה מבין ההיגדים הבאים הוא ההיגד הנכון בעבור בעיית התכנון הלינארי הנתונה בתחילת השאלה.

1. הפתרון האופטימלי הוא יחיד והוא $(0, 2)$.
2. יש אינסוף פתרונות אופטימליים לבעיה.
3. הפתרון האופטימלי לבעיה אינו חסום.
4. הפתרון האופטימלי הוא יחיד והוא $\left(\frac{18}{11}, \frac{10}{11}\right)$.

ב. עבור $k = 0$, קבע איזה מבין ההיגדים הבאים הוא ההיגד הנכון אם משנים את פונקציית המטרה של הבעיה הנתונה בתחילת השאלה ל- $\min\{z = 6x_2\}$:

1. הפתרון האופטימלי הוא יחיד והוא $(0, 2)$.
2. הפתרון האופטימלי לבעיה אינו חסום.
3. יש אינסוף פתרונות אופטימליים לבעיה.
4. אין פתרון אופטימלי לבעיה.

ג. עבור $k = 6$, קבע איזה מבין ההיגדים הבאים הוא ההיגד הנכון בעבור בעיית התכנון הלינארי הנתונה בתחילת השאלה.

1. הפתרון האופטימלי הוא יחיד והוא $(0, 2)$.
2. יש אינסוף פתרונות אופטימליים לבעיה.
3. הפתרון האופטימלי הוא יחיד והוא $\left(\frac{18}{11}, \frac{10}{11}\right)$.
4. הפתרון האופטימלי לבעיה אינו חסום.

ד. בעבור אילו ערכים של k יהיה הקדקוד $\left(\frac{18}{11}, \frac{10}{11}\right)$ הפתרון האופטימלי לבעיה הנתונה?

1. בעבור $k < 4$ בלבד.
2. בעבור $k > 15$ בלבד.
3. בעבור $4 \leq k \leq 15$.
4. לא קיים k כזה.

ה. עבור $k = 6$, קבע איזה מבין ההיגדים הבאים הוא ההיגד הנכון אם משנים את פונקציית המטרה של הבעיה הנתונה בתחילת השאלה ל- $\min\{z = 6x_1 + 6x_2\}$:

1. הפתרון האופטימלי הוא יחיד והוא $(0, 0)$.
2. אין פתרון אופטימלי לבעיה.
3. יש אינסוף פתרונות אופטימליים לבעיה.
4. הפתרון האופטימלי לבעיה אינו חסום.

1. עבור $k = 6$, קבע איזה מבין ההיגדים הבאים הוא ההיגד הנכון אם משנים את פונקציית המטרה של הבעיה הנתונה בתחילת השאלה ל- $\min\{z = 6x_1 + 6x_2\}$ וגם מוסיפים את האילוץ $x_2 \geq 0$:

1. הפתרון האופטימלי הוא יחיד והוא $(2, 0)$.

2. הפתרון האופטימלי לבעיה אינו חסום.

3. יש אינסוף פתרונות אופטימליים לבעיה.

4. הפתרון האופטימלי הוא יחיד והוא $(0, 0)$.

2. בעבור אילו ערכים של k יהיו לבעיית התכנון הלינארי הנתונה בתחילת השאלה אינסוף פתרונות אופטימליים, ומה יהיה ערכה של פונקציית המטרה בעבור כל אחד מערכי ה- k האלה?

1. בעבור $k = 4$ בלבד. בעבור ערך זה ערכה של פונקציית המטרה הוא 12.

2. בעבור $k = 15$ בלבד. בעבור ערך זה ערכה של פונקציית המטרה הוא 30.

3. בעבור $k = 4$ או $k = 15$. בעבור $k = 4$ ערכה של פונקציית המטרה הוא 12, ובעבור

$k = 15$ ערכה של פונקציית המטרה הוא 30.

4. לא קיים k כזה.

שאלה 7

בשאלה זו **שבעה** סעיפים, א'-ז', שאינם תלויים זה בזה. ענה על **כל** הסעיפים.

לפניך בעיה פרימלית של תכנון לינארי:

$$\max \{z = 24x_1 + 23x_2 + 32x_3 + 20x_4\}$$

בכפוף לאילוצים האלה:

$$2x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 7x_4 \leq 90$$

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 8x_4 \leq 65$$

$$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 85$$

הפתרון האופטימלי הפרימלי הוא:

$$x_1 = 7, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 19, \quad x_4 = 0$$

הפתרון האופטימלי הדואלי הוא:

$$y_1 = 5.6, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 3.2$$

כאשר y_i הוא המשתנה הדואלי המתאים לאילוץ פרימלי i , עבור $i = 1, 2, 3$.

א. בטבלת הסימפלקס הסופית עבור המודל הנתון, מספר המקדמים השונים מאפס, בשורת ה- z , הוא:

1. 5

2. 3

3. 4

4. אי-אפשר לדעת.

ב. איזה מבין ההיגדים הבאים הוא ההיגד הנכון עבור הפתרון האופטימלי הפרימלי?

1. משתני הסרק של האילוצים הראשון והשלישי הם משתנים בסיסיים.

2. משתני הסרק של כל האילוצים הם משתנים בסיסיים.

3. משתנה הסרק של האילוץ השני הוא משתנה בסיסי.

4. משתנה הסרק של האילוץ הראשון בלבד הוא בסיסי.

ג. במודל המקורי חל שינוי במקדמים של x_2 . המודל המעודכן הוא:

$$\max \{z = 24x_1 + 20x_2 + 32x_3 + 20x_4\}$$

$$2x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 7x_4 \leq 90$$

$$2x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 8x_4 \leq 65$$

$$4x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 85$$

הפתרון הדואלי החדש הוא:

$$1. \quad y_1 = 0, \quad y_2 = 3.5, \quad y_3 = 5.2$$

$$2. \quad y_1 = 5.6, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 3.2$$

$$3. \quad y_1 = 4.3, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 7.2$$

$$4. \quad y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 10$$

ד. למודל המקורי הוסיפו משתנה חדש x_{new} , המודל המעודכן הוא:

$$\max \{z = 24x_1 + 23x_2 + 32x_3 + 20x_4 + 25x_{new}\}$$

$$2x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 6x_{new} \leq 90$$

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 8x_4 + 5x_{new} \leq 65$$

$$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 9x_{new} \leq 85$$

הפתרון האופטימלי הדואלי החדש הוא:

$$1. \quad y_1 = 0, \quad y_2 = 3, \quad y_3 = 0, \quad y_4 = 0$$

$$2. \quad y_1 = 5.6, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 3.2$$

$$3. \quad y_1 = 4.3, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 7.2$$

$$4. \quad y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 10$$

ה. לבעיה הפרימלית המקורית הוסיפו את האילוך: $3x_1 + 8x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 35$.

הפתרון האופטימלי של הבעיה הפרימלית יחד עם האילוך החדש יהיה כעת:

$$1. \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 6.7$$

$$2. \quad x_1 = 7, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 19, \quad x_4 = 0$$

$$3. \quad x_1 = 5, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 2.8, \quad x_4 = 1.7$$

$$4. \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 8, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 1$$

1. חל שינוי באגף ימין של האילוץ השני בבעיה הפרימלית. אגף ימין החדש, לאחר השינוי, הוא 60 (במקום 65).

קבע איזה מבין ההיגדים הבאים יהיה ההיגד הנכון בעקבות השינוי:

1. הפתרון הפרימלי הנתון הופך לבלתי אפשרי.
2. הפתרון הפרימלי הנתון נשאר אפשרי אך לא אופטימלי.
3. הפתרון הפרימלי הנתון נשאר אפשרי ואופטימלי.
4. האילוץ השני הופך לאילוץ שמתקיים כשוויון (כלומר הופך להיות אילוץ פעיל).

2. למודל המקורי הוסיפו את האילוץ: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq a$. הפתרון הנתון של הבעיה הפרימלית יישאר אופטימלי עבור כל a שמקיים:

1. $a < 64$
2. $a \leq 54$
3. $a > 30$
4. $a \geq 64$

שאלה 8

בשאלה זו **שבעה** סעיפים, א'–ז', שאינם תלויים זה בזה. ענה על **כל** הסעיפים.

א. בטבלה שלפניך נתון חלק מפתרון בסיסי אפשרי לבעיית התובלה: $x_{22} = 0$.

מקורות	יעדים			היצע
	1	2	3	
1	10	0	20	40
2	12	7	9	100
3	0	14	16	60
ביקוש	20	a	180	

רוצים להפעיל את שיטת הפינה הצפון-מערבית כדי למצוא פתרון בסיסי אפשרי לבעיית התובלה הנתונה, ללא הוספת יעד דמה או מקור דמה. מה צריך להיות ערכו של המשתנה a שמופיע בטבלה?

1. $a = 60$ בלבד.
2. כל a הגדול מ-0.
3. $a = 0$ בלבד.
4. לא קיים ערך של a שעבורו ימצא פתרון בסיסי אפשרי לבעיית התובלה הנתונה.

ב. בטבלה שלפניך נתון חלק מפתרון בסיסי אפשרי לבעיית התובלה: $x_{22} = 0$.

מקורות	יעדים			היצע
	1	2	3	
1	10	0	20	20
2	12	7 0	9	120
3	0	14	16	60
ביקוש	20	0	180	

בפתרון בסיסי אפשרי התחלתי, לפי שיטת הפינה הצפון-מערבית, נוסף על $x_{22} = 0$ קיימים המשתנים האלה:

1. $x_{11} = 20, x_{22} = 0, x_{23} = 120, x_{33} = 60$
2. $x_{11} = 20, x_{21} = 0, x_{22} = 0, x_{23} = 120, x_{33} = 60$
3. $x_{11} = 20, x_{31} = 0, x_{22} = 0, x_{23} = 120, x_{33} = 60$
4. $x_{11} = 20, x_{12} = 0, x_{31} = 0, x_{23} = 120, x_{33} = 60$

ג. בטבלה שבסעיף ב' משנים את המחיר בתא (3, 1) מ-0 ל-15. קבע איזה מבין ההיגדים הבאים הוא ההיגד הנכון:

1. הפתרון הבסיסי האפשרי לא ישתנה וגם ערכה של פונקציית המטרה לא ישתנה.
2. הפתרון הבסיסי האפשרי ישתנה וערכה של פונקציית המטרה יגדל פי 15.
3. הפתרון הבסיסי האפשרי ישתנה אך ערכה של פונקציית המטרה לא ישתנה.
4. הפתרון הבסיסי האפשרי לא ישתנה אך ערכה של פונקציית המטרה יגדל פי 15.

ד. בטבלה שלפניך נתון חלק מפתרון בסיסי אפשרי לבעיית תובלה, ונתונים ערכיהם של $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$ שמתאימים לפתרון זה.

מקורות	יעדים			היצע	u_i
	1	2	3		
1	2 20	5	7	20	2
2	0	8 10	4	10	0
3	10	0	8 10	15	-8
ביקוש	20	15	10		
v_j	0	8	16		

הפתרון הבסיסי האפשרי לבעיה הנתונה הוא:

1. $x_{11} = 20, x_{21} = 0, x_{22} = 10, x_{32} = 5, x_{33} = 10$

2. $x_{11} = 20, x_{12} = 0, x_{22} = 10, x_{32} = 0, x_{33} = 10$

3. $x_{11} = 20, x_{21} = 0, x_{22} = 10, x_{32} = 7, x_{33} = 10$

4. לפי הנתונים שבטבלה אי-אפשר למצוא פתרון בסיסי אפשרי מתאים.

ה. בטבלה שלפניך נתון חלק מפתרון בסיסי אפשרי לבעיית תובלה, ונתון ערכם של u_2 ושל v_2 . יש לחשב בטבלה שלהלן את ערכם של u_1 , u_3 , v_1 , v_3 .

מקורות	יעדים			היצע	u_i
	1	2	3		
1	12 100	15 70	17 10	180	
2	10	8 80	14	80	0
3	15	20	18 120	120	
ביקוש	100	150	130		
v_j		8			

הפתרון הנכון הוא:

1. $u_1 = 0, u_3 = 18, v_1 = 12, v_3 = 17$

2. $u_1 = 7, u_3 = 8, v_1 = 5, v_3 = 10$

3. $u_1 = 0, u_3 = 120, v_1 = 100, v_3 = 10$

4. $u_1 = 62, u_3 = 68, v_1 = 38, v_3 = -52$

- ו. בטבלה שלפניך נתון חלק מפתרון בסיסי אפשרי לבעיית תובלה, ונתונים ערכיהם של $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$ שמתאימים לפתרון זה.

מקורות	יעדים			היצע	u_i
	1	2	3		
1	10 20	25	30	20	10
2	10 30	22	14 20	50	10
3	16	20 40	20 20	60	16
ביקוש	50	40	40		
v_j	0	4	4		

השלם את הפתרון לפתרון בסיסי אפשרי וקבע איזה מבין ההיגדים הבאים הוא ההיגד הנכון:

1. הפתרון שיתקבל אינו פתרון אפשרי.
2. הפתרון שיתקבל הוא פתרון בסיסי אפשרי אך לא אופטימלי.
3. הפתרון שיתקבל הוא פתרון אופטימלי אך איננו פתרון אופטימלי יחיד.
4. הפתרון שיתקבל הוא פתרון אופטימלי יחיד.

ז. בטבלה שלפניך נתונה בעיית תובלה. נתוני הבעיה, כולל **מחירי התובלה** של יחידת מוצר מהמקורות ליעדים, מוצגים בטבלה שלהלן:

מקורות	יעדים			היצע
	1	2	3	
1	22	30	32	20
2	30	18	24	20
3	15	10	8	30
4	25	15	22	30
ביקוש	30	40	25	

נוסף על כך, אסור שיישאר מלאי במקור 1. הבעיה הנתונה אינה מאוזנת, לכן הציע תלמיד להוסיף "יעד דמיוני 4" אשר יקבל את חמשת המוצרים מההיצע העודף.

העלויות ליחידה מכל מקור לכל יעד נתונות בטבלה שלהלן:

מקורות	יעדים				היצע
	1	2	3	4	
1	22	30	32	x	20
2	30	18	24	y	20
3	15	10	8	z	30
4	25	15	22	w	30
ביקוש	30	40	25	5	

ערכי העלויות של "יעד 4" נתונים בטבלה כפרמטרים x, y, z, w . מה צריך להיות ערכו של כל אחד מן הפרמטרים x, y, z, w כדי שיהיה אפשר למצוא פתרון בסיסי אפשרי לבעיית התובלה הנתונה? הנח כי M מוגדר כמספר גדול מאוד.

בחר את התשובה הנכונה מבין ארבע התשובות האלה.

1. $x = 0, y = 0, z = 0, w = 0$

2. $x = M, y = M, z = M, w = M$

3. $x = 0, y = M, z = M, w = M$

4. $x = M, y = 0, z = 0, w = 0$

הדבק את מדבקת הנבחן במקום המיועד לכך בדף התשובות שבנספח א' והדק אותו למחברת הבחינה.

בהצלחה!

הזבק את מדבקת הנבחן שלך במקום המיועד לכך, והדק את הדף הזה אל מחברת הבחינה שלך.

הקף בעיגול את הספרה המייצגת את התשובה הנכונה לכל סעיף.

שאלה 1					שאלה 2					שאלה 3					שאלה 4				
סעיף א	1	2	3	4	סעיף א	1	2	3	4	סעיף א	1	2	3	4	סעיף א	1	2	3	4
סעיף ב	1	2	3	4	סעיף ב	1	2	3	4	סעיף ב	1	2	3	4	סעיף ב	1	2	3	4
סעיף ג	1	2	3	4	סעיף ג	1	2	3	4	סעיף ג	1	2	3	4	סעיף ג	1	2	3	4
סעיף ד	1	2	3	4	סעיף ד	1	2	3	4	סעיף ד	1	2	3	4	סעיף ד	1	2	3	4
סעיף ה	1	2	3	4	סעיף ה	1	2	3	4	סעיף ה	1	2	3	4	סעיף ה	1	2	3	4
שאלה 5					שאלה 6					שאלה 7					שאלה 8				
סעיף א	1	2	3	4	סעיף א	1	2	3	4	סעיף א	1	2	3	4	סעיף א	1	2	3	4
סעיף ב	1	2	3	4	סעיף ב	1	2	3	4	סעיף ב	1	2	3	4	סעיף ב	1	2	3	4
סעיף ג	1	2	3	4	סעיף ג	1	2	3	4	סעיף ג	1	2	3	4	סעיף ג	1	2	3	4
סעיף ד	1	2	3	4	סעיף ד	1	2	3	4	סעיף ד	1	2	3	4	סעיף ד	1	2	3	4
סעיף ה	1	2	3	4	סעיף ה	1	2	3	4	סעיף ה	1	2	3	4	סעיף ה	1	2	3	4
סעיף ו					סעיף ו	1	2	3	4	סעיף ו	1	2	3	4	סעיף ו	1	2	3	4
סעיף ז					סעיף ז	1	2	3	4	סעיף ז	1	2	3	4	סעיף ז	1	2	3	4

נספח ב': מילון מונחים (3 עמודים)

לשאלון 714003, אביב תשע"ה

תרגום המונח			המונח
אנגלית	רוסית	ערבית	
		الجبر الخطي	אלגברה לינארית
infinite number of solutions	бесконечное число решений	عدد غير نهائي من الحلول	אינסוף פתרונות
base	основание, базис	أساس	בסיס
dual	Двойственность	مزدوج	דואלי
determinant	Определитель, детерминант	المحددات	דטרמיננטה
rank	Степень, ранг	درجة	דרגה
vector	Вектор	متجه	וקטור
one-one correspondence	Инъекция, одно-однозначное отображение	ذات قيمة واحدة	חד-חד ערכית
transformation	отображение	تحول	טרנספורמציה
matrix	матрица	مصفوفة	מטריצה
inverse matrix	обратная матрица	مصفوفة معكوسة	מטריצה הופכית
invertible matrix	Невырожденная матрица	مصفوفة يمكن عكسها	מטריצה הפיכה
dimension	Размерность	بُعد	ממד
system of equations	Система уравнений	هيئة مُعادلات	מערכת משוואות
homogeneous system of equation	однородная система уравнений	هيئة مُعادلات متجانسة	מערכת משוואות הומוגנית
coefficients	коэффициенты	مُعاملات	מקדמים
space	пространство	بُعد	מרחב
slack variable	дополнительная переменная	متغير خامل	משתנה סרק
scalar	скаляр	عددي	סקלר

תרגום המונח			המונח
אנגלית	רוסית	ערבית	
onto	Сюръекция	عُلْيَا	על
eigenvalue	собственное число	قيمة ذاتية	ערך עצמי
		البرمجة الخطية	תכנון לינארי
constraint	ограничение, неравенство	إجبار	אילוץ
demand	спрос	الطلب	ביקוש
transport problem	Транспортная задача	مشكلة النقل	בעיית תובלה
supply	Предложение	العرض	היצע
simplex tableau	симплекс-таблица	جدول بسيط	טבלת סימפלקס
dummy target	"свалка" — дополнительный пункт, куда свозят все лишнее производство	هدف وهمي	יעד דמה
not limited to the sign	неограниченный по знаку	لا يقتصر على علامة	לא מוגבל בסימן
dummy source	дополнительный (искусственный) производитель	مصدر وهمي	מקור דמה
basic variable	базисная переменная	متغير أساسي	משתנה בסיסי
cost	стоимость	تكلفة	עלות
objective function	целевая функция	وظيفة هادفة	פונקציית מטרה
northwestern corner method	Метод северо-западного угла	طريقة الركن الشمالي الغربي	שיטת הפינה הצפון-מערבית
primal problem	Прямая задача	مشكلة بدائية	בעיה פרימלית
parameter	Параметр	بارامتر	פרמטר

תרגום המונח			המונח
אנגלית	רוסית	ערבית	
optimal solution	оптимальное решение	الحل الأمثل	פתרון אופטימלי
bounded solution	ограниченное решение	حلّ مسدود	פתרון חסום
single solution	единственное решение	حلّ وحيد	פתרון יחיד
vertex	вершина	رأس	קדקוד
linear combination	линейная комбинация	مزيغ خطّي	קומבינציה לינארית
domain of possible solutions	область допустимых решений	مجال الحلول الممكنة	תחום הפתרונות האפשריים
linear programming	Линейное программирование	البرمجة الخطيّة	תכנון לינארי
linear dependence	линейная зависимость	الاعتماد الخطّي	תלות לינארית