

**Государство Израиль
Министерство просвещения**

Тип экзамена:

а. на аттестат зрелости для средних школ

б. на аттестат зрелости для экстернов

Время проведения экзамена: лето 2007 года

Номер вопросника: 035005, 305

Приложение: листы с формулами
для уровня в 4 и 5 единиц обучения

מדינת ישראל

משרד החינוך

סוג הבחינה:

א. בגרות לבתי ספר על-יסודיים

ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים

מועד הבחינה: קיץ תשס"ז, 2007

מספר השאלון: 035005, 305

נספח: דפי נוסחאות

4-ול-5 יחידות לימוד

Математика

Вопросник "Хей"

מתמטיקה

שאלון ה'

Указания экзаменуемым

א. Продолжительность экзамена: два часа.

ב. Строение вопросника и ключ к оценке:

В этом вопроснике два раздела.

Раздел первый: алгебра

— $(1 \times 33\frac{1}{3})$ — $33\frac{1}{3}$ баллов

Раздел второй: планиметрия и теория вероятностей

— $(2 \times 33\frac{1}{3})$ — $66\frac{2}{3}$ баллов

Всего — 100 баллов

в. Разрешенный вспомогательный материал:

1. Калькулятор без графического дисплея. При работе с калькулятором, который предоставляет возможности программирования, запрещается использовать эти возможности. Использование калькулятора с графическим дисплеем или возможностей программирования может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.
2. Листы с формулами (прилагаются).

г. Особые указания:

1. Не переписывайте вопрос; обозначьте только его номер.
2. Начинайте ответ на каждый вопрос с новой страницы. Запишите в тетради этапы решения (также и в том случае, когда вычисления производились с помощью калькулятора). Объясните все свои действия, включая вычисления, подробно, в ясной и упорядоченной форме. Недостаточно подробная запись решения может привести к тому, что оценка за экзамен будет снижена или экзамен будет аннулирован.
3. Для черновых записей следует использовать только экзаменационную тетрадь или листы, полученные от экзаменаторов. Пользование другими черновиками может привести к тому, что экзамен будет аннулирован.

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שתיים.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה:

בשאלון זה שני פרקים.

פרק ראשון: אלגברה —

$33\frac{1}{3} \times 1$ — $33\frac{1}{3}$ נקודות

פרק שני: הנדסת מישור והסתברות —

$33\frac{1}{3} \times 2$ — $66\frac{2}{3}$ נקודות

סה"כ — 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות:
 1. אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
 2. התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
 3. לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים. שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

Желаем успеха!

/продолжение на следующей странице/

בהצלחה!

/המשך מעבר לדף/

Вопросы

Обратите внимание! Объясните все Ваши действия, включая вычисления, подробным и ясным образом. Недостаточная детализация может снизить Вашу оценку или привести к аннулированию экзамена.

Раздел первый

АЛГЕБРА

(33 $\frac{1}{3}$ балла)

Ответьте на один из вопросов 1-2.

Обратите внимание! Если Вы ответите более чем на один вопрос, будет проверен только первый из ответов в Вашей тетради.

Алгебра

1. Дана функция: $f(x) = \frac{x+1}{2x^2+x+1}$.

(κ) Найдите, при каких значениях x данная функция является отрицательной.

(ג) Дана прямая $y = m$, $m \neq 0$.

(1) Найдите, при каких значениях m эта прямая пересекает график данной функции в двух различных точках.

(2) Найдите, при каких значениях m эта прямая не пересекает график данной функции.

2. Последовательность a_n задана при помощи рекуррентного правила

$$\begin{cases} a_1 = 11 \\ a_{n+1} = -0.5 a_n + 4.5 \end{cases}$$

для любого натурального n .

Последовательность b_n задана при помощи $b_n = a_n - 3$ для любого натурального n .

(κ) Докажите, что последовательность b_n является геометрической прогрессией.

(ג) (1) Найдите знаменатель последовательности, включающей все члены, которые находятся на местах с четным номером в последовательности b_n .

(2) Найдите сумму всех членов бесконечной последовательности b_n , находящихся на местах с четным номером.

/продолжение на странице 3/

Раздел второй
ПЛАНИМЕТРИЯ И ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
($66\frac{2}{3}$ балла)

Ответьте на два из вопросов 3-6, из которых разрешается отвечать не более, чем на один из вопросов 5-6. (За каждый вопрос – $33\frac{1}{3}$ балла).

Обратите внимание! Если Вы ответите более чем на два вопроса, будут проверены только первые два из ответов в Вашей тетради.

Планиметрия

3. На сторонах AC и AB треугольника ABC построили равносторонние треугольники ACE и ABD (смотрите чертеж).

(а) Докажите, что $BE = DC$.

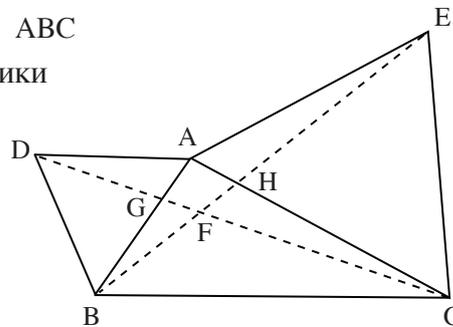
BE пересекает сторону AC в точке H, а DC пересекает сторону AB в точке G.

BE и DC пересекаются в точке F (смотрите чертеж).

(б) Найдите величину угла GFB. Обоснуйте свой ответ.

Указание: обозначьте $\sphericalangle ADG$ при помощи β .

(в) Какой должна быть величина угла BAC, чтобы можно было вписать четырехугольник ANFG в окружность? Обоснуйте свой ответ.



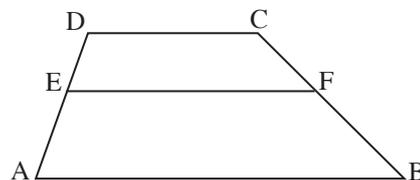
4. Прямая, параллельная основаниям трапеции ABCD, пересекает боковые стороны данной трапеции в точках E и F (смотрите чертеж).

Дано: $AB = 25$ см, $DC = 11$ см, $\frac{DE}{EA} = \frac{3}{4}$.

(а) Вычислите длину EF.

(б) Вычислите отношение площади трапеции EFCD к площади трапеции ABFE.

Объясните свои вычисления.



/продолжение на странице 4/

**Обратите внимание! Разрешается отвечать не более, чем на один из вопросов 5-6.
Формулы для вопросов по теории вероятностей находятся на странице 6.**

Теория вероятностей

5. В ходе одной игры существует три возможности:
можно выиграть 10 очков, 15 очков или 30 очков.
Вероятность выиграть в ходе одной игры 30 очков равна 0.2.
Вероятность выиграть в ходе 2 последовательных игр общую сумму, составляющую в точности 25 очков, равна 0.3.
- (κ) P – это вероятность выиграть 10 очков в ходе одной игры.
Вычислите P , если известно, что $P > 0.4$.
- (ц) Какова вероятность выиграть общую сумму, составляющую в точности 50 очков, в ходе 3 последовательных игр?
- (λ) В эту игру играют 5 человек. Каждый из них играет 3 игры подряд.
Какова вероятность того, что не более одного из них выиграет общую сумму, составляющую в точности 50 очков?

/продолжение на странице 5/

Вероятностное мышление в повседневной жизни

6. В ходе опроса, проведенного среди всех кандидатов на участие в конкурсе певцов, выяснилось, что число кандидатов, приехавших из городов, в 1.5 раза больше, чем число кандидатов, приехавших из других населенных пунктов. 52% кандидатов, приехавших из городов, не были приняты на конкурс. 25.6% из общего числа кандидатов приехали из других населенных пунктов и были приняты на конкурс.

(н) Какова пропорция принятых на конкурс кандидатов из числа кандидатов, приехавших из городов?

(а) На основании некоторых данных журналист утверждал, что при приеме на конкурс предпочтение отдавалось кандидатам из других населенных пунктов.

При помощи соответствующих вычислений объясните, на какие данные опирался журналист.

(א) Организаторы конкурса утверждали, что место жительства не играло никакой роли в приеме кандидатов на конкурс. Они предложили проверить, не мог ли какой-либо другой фактор повлиять на их прием.

Они проверили связь между местом жительства и приемом на конкурс в двух группах: среди кандидатов, изучавших вокал, и среди кандидатов, не изучавших вокал. Ниже приведены полученные результаты:

	<u>Кандидаты, изучавшие вокал</u>		<u>Кандидаты, не изучавшие вокал</u>	
	Число кандидатов, которые были приняты	Число кандидатов, которые не были приняты	Число кандидатов, которые были приняты	Число кандидатов, которые не были приняты
Число кандидатов из городов	60	15	120	180
Число кандидатов из других населенных пунктов	120	30	40	60

(1) Подтверждают ли результаты проверки верность утверждения организаторов конкурса? Обоснуйте при помощи соответствующего вычисления и объясните.

(2) Можно ли на основании результатов проверки предположить, что изучение вокала может быть фактором, повлиявшим на прием кандидатов на конкурс? Обоснуйте при помощи соответствующего вычисления и объясните.

/продолжение на странице 6/

Формулы теории вероятностей

Условная пропорция и условная вероятность: $P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Формула Байеса: $P(A / B) = \frac{P(B / A) \cdot P(A)}{P(B)}$

Имеется статистическая связь: $P(A / B) \neq P(A / \bar{B})$
 $P(A / B) \neq P(A)$

Желаем успеха!

Авторские права принадлежат Государству Израиль.
Копировать или публиковать можно только
с разрешения Министерства просвещения.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל.
אין להעתיק או לפרסם
אלא ברשות משרד החינוך.

נוסחאון מתמטיקה

5-4 יחידות לימוד (החל מקיץ תש"ן)

אלגברה

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$$

פירוק לגורמים

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k + \dots + b^n$$

בינום ניוטון

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

נוסחאות וייטה

$$(x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a})$$

(x_1, x_2) שורשי משוואה ריבועית.

סדרות

סדרה הנדסית	סדרה חשבונית	
$a_n = a_1 q^{n-1}$	$a_n = a_1 + (n-1)d$	האיבר ה-n'י :
$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$	$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$	הסכום:

$$z = a + bi = r(\cos\theta + i \sin\theta)$$

מספרים מרוכבים

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

מכפלה בהצגה קוטבית:

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

משפט דה-מואבר:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) \right] \quad \text{שורשי המשוואה } z^n = r(\cos\alpha + i \sin\alpha) \text{ הם:}$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1$$

קומבינטוריקה

$$P_n = n!$$

מספר התמורות של n עצמים (בלי חזרות):

מספר התמורות של n עצמים כשמתוכם יש n_1, n_2, \dots, n_k עצמים שווים ביניהם:

$$P_n = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

מספר החליפות של k מתוך n עצמים (בלי חזרות):

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

מספר הצירופים של k מתוך n עצמים (בלי חזרות):

וקטורים

מישור דרך קצות הווקטורים $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$, $\vec{c} = \vec{OC}$: $\vec{x} = t(\vec{b} - \vec{a}) + s(\vec{c} - \vec{a})$
 מכפלה סקלרית: $(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos\alpha$
 ניצבות: $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$
 אורך של וקטור: $|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

מרחק בין $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)$ למישור $\vec{a} \cdot \vec{x} + c = 0$: $\frac{|\vec{a} \cdot \vec{z} + c|}{|\vec{a}|}$

זווית בין הישר $t\vec{b} + \vec{d}$ למישור $\vec{a} \cdot \vec{x} + c = 0$: $\sin\beta = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

זווית בין המישורים $\vec{a} \cdot \vec{x} + c = 0$, $\vec{b} \cdot \vec{x} + d = 0$: $\cos\alpha = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

חוקות ולוגריתמים: $\log_a a^x = x$, $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

טריגונומטריה

זהויות

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$

$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$ $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$

$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$ $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$

משפט הסינוס: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$

שטח גורה: $\frac{1}{2}r^2\alpha$ אורך קשת של α רדיאנים: $r\alpha$

הנדסת המרחב

נפח כדור: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ נפח הרוט ופירמידה (B - שטח הבסיס): $V = \frac{B \cdot h}{3}$

שטח פנים של כדור: $P = 4\pi R^2$ שטח מעטפת הרוט: $M = \pi R \ell$

אנליזה (חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי)

נגזרות

$(uv)' = u'v + uv'$ $(x^n)' = nx^{n-1}$ $\sin'x = \cos x$ $\arcsin'x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - v'u}{v^2}$ $(a^x)' = a^x \ln a$ $\cos'x = -\sin x$ $\arccos'x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\log_a'x = \frac{1}{x \ln a}$ $\operatorname{tg}'x = \frac{1}{\cos^2x}$ $\operatorname{arctg}'x = \frac{1}{1+x^2}$

כלל השרשרת: $f'(x) = v'(u) \cdot u'(x)$

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

אינטגרלים

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} [f(a) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(b)]$$

כלל הטור:

פונקציות

$f(-x) = -f(x)$: פונקציה אי-זוגית:

$f(x) = f(-x)$

פונקציה זוגית:

U : פונקציה קמורה:

נקודת פיתול: נקודת מעבר בין קמירות לקעירות

סטטיסטיקה והסתברות

$$S = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 f_1 + (x_2 - \bar{x})^2 f_2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 f_n}{N}}$$

סטיית תקן:

x_n, \dots, x_2, x_1 השכיחויות של f_n, \dots, f_2, f_1

$f_1 + f_2 + \dots + f_n = N$; ממוצע הנתונים \bar{x}

נוסחת ברנולי: ההסתברות ל k הצלחות ב n נסיונות בהתפלגות בינומית עם הסתברות p :

$$p_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

לוח של התפלגות נורמלית (0,1) מצטברת

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.500	504	508	512	516	520	524	528	532	536
0.1	0.540	544	548	552	556	560	564	568	571	575
0.2	0.579	583	587	591	595	599	603	606	610	614
0.3	0.618	622	625	629	633	637	641	644	648	652
0.4	0.655	659	663	666	670	674	677	681	684	688
0.5	0.692	695	699	702	705	709	712	716	719	722
0.6	0.726	729	732	736	739	742	745	749	752	755
0.7	0.758	761	764	767	770	773	776	779	782	787
0.8	0.788	791	794	797	800	802	805	809	811	813
0.9	0.816	819	821	824	826	829	832	834	837	839
1.0	0.841	844	846	848	851	853	855	858	860	862
1.1	0.864	866	869	871	873	875	877	879	881	883
1.2	0.885	887	889	891	893	894	896	898	900	902
1.3	0.903	905	907	908	910	911	913	915	916	918
1.4	0.919	921	922	924	925	926	928	929	931	932
1.5	0.933	935	936	937	938	939	941	942	943	944
1.6	0.945	946	947	948	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1.7	0.9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1.8	0.9641	9650	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1.9	0.9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9762	9767
2.0	0.9773	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2.1	0.9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2.2	0.9861	9865	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2.3	0.9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2.4	0.9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2.5	0.9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2.6	0.9954	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2.7	0.9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2.8	0.9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2.9	0.9981	9982	9983	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3.0	0.9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990

הנדסה אנליטית

קו ישר

$y - y_1 = m(x - x_1)$ משוואת ישר דרך (x_1, y_1) ששיפועו m :

$\text{tg}\alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$ נוסחה לזווית α שבין הישרים $y = m_2 x + n_2$, $y = m_1 x + n_1$:

$m_1 \cdot m_2 = -1$ ניצבות הישרים $y = m_2 x + n_2$, $y = m_1 x + n_1$:

$d = \pm \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ מרחק הנקודה $(x_0; y_0)$ מהישר $Ax + By + C = 0$:

$\left(\frac{\ell x_1 + kx_2}{k + \ell}, \frac{\ell y_1 + ky_2}{k + \ell} \right) : (A(x_1, y_1); B(x_2, y_2))$ $k : \ell$ ביחס AB הקטע את המחלקת נקודה המחלקת את הקטע

מעגל

משוואת המשיק למעגל $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ בנקודה $(x_0; y_0)$:

$(x_0 - a) \cdot (x - a) + (y_0 - b) \cdot (y - b) = R^2$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ היפרבולה

$y = \pm \frac{b}{a}x$

האסימפטוטות:

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

מרחק המוקד מהראשית:

$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$

משיק להיפרבולה בנקודה $(x_0; y_0)$:

$n^2 = m^2 a^2 - b^2$

התנאי שהישר $y = mx + n$ ישיק להיפרבולה:

$y^2 = 2px$ פרבולה

$yy_0 = p(x + x_0)$

משיק לפרבולה בנקודה $(x_0; y_0)$:

$n = \frac{p}{2m}$

התנאי שהישר $y = mx + n$ ישיק לפרבולה: