

## מתמטיקה

### שאלון ו'

#### הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעה ושלושה רבעים.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים.

פרק ראשון – אלגברה –  $33 \frac{1}{3} \times 1$  –  $33 \frac{1}{3}$  נקודות

פרק שני – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי,

טריגונומטריה –  $33 \frac{1}{3} \times 2$  –  $66 \frac{2}{3}$  נקודות

סה"כ – 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים. שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

**בהצלחה!**

## ה ש א ל ו ת

### פרק ראשון – אלגברה (33 1/3 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 1-2.

אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

1. שלושה צינורות, I, II, III, ממלאים יחד ברכה במים ב- 6 דקות.

צינור II לבד ממלא את הברכה ב- 75% מהזמן שצינור I לבד ממלא את הברכה.

צינור III לבד ממלא את הברכה ב- 10 דקות יותר מהזמן שצינור II לבד

ממלא את הברכה.

בכמה דקות כל אחד מהצינורות ממלא לבד את הברכה?

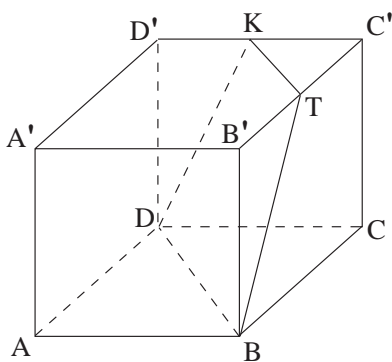
2. הוכח באינדוקציה או בדרך אחרת כי לכל  $n$  טבעי מתקיים

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

### פרק שני – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי, טריגונומטריה (66 2/3 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 3-5 (לכל שאלה – 33 1/3 נקודות).

אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.



3. אורך צלע הקובייה ABCDA'B'C'D' הוא  $a$ .

נקודה K היא אמצע המקצוע  $D'C'$ ,

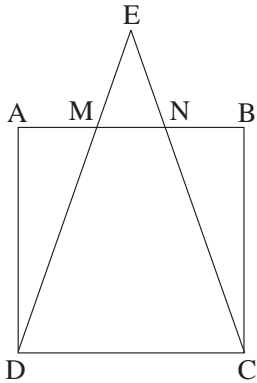
ונקודה T היא אמצע המקצוע  $B'C'$

(ראה ציור).

א. הבע את גובה הטרפז BDKT באמצעות  $a$ .

ב. מצא את הזווית שבין המישור BDKT

לבסיס הקובייה.



4. נתון ריבוע ABCD שאורך צלעו 10 ס"מ.

E היא נקודה כלשהי מחוץ לריבוע, כך שהמשולש DEC

הוא שווה-שוקיים ( $ED = EC$ ).

שוקי המשולש חותכים את הצלע AB

בנקודות M ו-N (ראה ציור).

מצא מה צריך להיות אורך הקטע AM

כדי שהסכום של שטחי המשולשים EMN, AMD, ו-BNC יהיה מינימלי.

5. נתונה הפונקציה  $y = -\frac{4x^3 + 4x^2 - 15x - 18}{2x + 3}$  ( $x \neq -\frac{3}{2}$ ).

העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $y = 6$ . למשיק יש שיפוע שלילי.

מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי המשיק ועל ידי ציר ה-x.

## בהצלחה!

# נוסחאון מתמטיקה

5-4 יחידות לימוד (החל מקיץ תש"ן)

## אלגברה

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$$

פירוק לגורמים

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k + \dots + b^n$$

בינום ניוטון

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

נוסחאות וייטה

$$(x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a})$$

( $x_1, x_2$ ) שורשי משוואה ריבועית.

## סדרות

| סדרה הנדסית                        | סדרה חשבונית                        |               |
|------------------------------------|-------------------------------------|---------------|
| $a_n = a_1 q^{n-1}$                | $a_n = a_1 + (n-1)d$                | האיבר ה-n'י : |
| $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ | $S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$ | הסכום:        |

$$z = a + bi = r(\cos\theta + i \sin\theta)$$

מספרים מרוכבים

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

מכפלה בהצגה קוטבית:

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

משפט דה-מואבר:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left[ \cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) \right] \quad \text{שורשי המשוואה } z^n = r(\cos\alpha + i \sin\alpha) \text{ הם:}$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1$$

## קומבינטוריקה

$$P_n = n!$$

מספר התמורות של n עצמים (בלי חזרות):

מספר התמורות של n עצמים כשמתוכם יש  $n_1, n_2, \dots, n_k$  עצמים שווים ביניהם:

$$P_n = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

מספר החליפות של k מתוך n עצמים (בלי חזרות):

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

מספר הצירופים של k מתוך n עצמים (בלי חזרות):

וקטורים

מישור דרך קצות הווקטורים  $\vec{a} = \vec{OA}$ ,  $\vec{b} = \vec{OB}$ ,  $\vec{c} = \vec{OC}$ :  $\vec{x} = t(\vec{b} - \vec{a}) + s(\vec{c} - \vec{a})$   
 מכפלה סקלרית:  $(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos\alpha$   
 ניצבות:  $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$   
 אורך של וקטור:  $|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

מרחק בין  $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)$  למישור  $\vec{a} \cdot \vec{x} + c = 0$ :  $\frac{|\vec{a} \cdot \vec{z} + c|}{|\vec{a}|}$

זווית בין הישר  $t\vec{b} + \vec{d}$  למישור  $\vec{a} \cdot \vec{x} + c = 0$ :  $\sin\beta = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

זווית בין המישורים  $\vec{a} \cdot \vec{x} + c = 0$ ,  $\vec{b} \cdot \vec{x} + d = 0$ :  $\cos\alpha = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

חוקות ולוגריתמים:  $\log_a a^x = x$ ,  $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

טריגונומטריה

זהויות

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$        $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$

$\text{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\text{tg}\alpha \pm \text{tg}\beta}{1 \mp \text{tg}\alpha \text{tg}\beta}$        $\text{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$

$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$        $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$        $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$        $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$

משפט הסינוס:  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$        $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$

שטח גורה:  $\frac{1}{2}r^2\alpha$       אורך קשת של  $\alpha$  רדיאנים:  $r\alpha$

הנדסת המרחב

נפח כדור:  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$       נפח הרוט ופירמידה (B - שטח הבסיס):  $V = \frac{B \cdot h}{3}$

שטח פנים של כדור:  $P = 4\pi R^2$       שטח מעטפת הרוט:  $M = \pi R \ell$

אנליזה (חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי)

נגזרות

$(uv)' = u'v + uv'$        $(x^n)' = nx^{n-1}$        $\sin'x = \cos x$        $\text{arc sin}'x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - v'u}{v^2}$        $(a^x)' = a^x \ln a$        $\cos'x = -\sin x$        $\text{arc cos}'x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\log_a'x = \frac{1}{x \ln a}$        $\text{tg}'x = \frac{1}{\cos^2x}$        $\text{arc tg}'x = \frac{1}{1+x^2}$

כלל השרשרת:  $f'(x) = v'(u) \cdot u'(x)$

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

אינטגרלים

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} [ f(a) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(b) ]$$

כלל הטרוז:

פונקציות

$f(-x) = -f(x)$  : פונקציה אי-זוגית:

$f(x) = f(-x)$

פונקציה זוגית:

U : פונקציה קמורה:

נקודת פיתול: נקודת מעבר בין קמירות לקעירות

סטטיסטיקה והסתברות

$$S = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 f_1 + (x_2 - \bar{x})^2 f_2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 f_n}{N}}$$

סטיית תקן:

$x_n, \dots, x_2, x_1$  השכיחויות של  $f_n, \dots, f_2, f_1$

$f_1 + f_2 + \dots + f_n = N$  ; ממוצע הנתונים  $\bar{x}$

נוסחת ברנולי: ההסתברות ל  $k$  הצלחות ב  $n$  נסיונות בהתפלגות בינומית עם הסתברות  $p$ :

$$p_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

לוח של התפלגות נורמלית (0,1) מצטברת

| u   | 0      | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    |
|-----|--------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 0.0 | 0.500  | 504  | 508  | 512  | 516  | 520  | 524  | 528  | 532  | 536  |
| 0.1 | 0.540  | 544  | 548  | 552  | 556  | 560  | 564  | 568  | 571  | 575  |
| 0.2 | 0.579  | 583  | 587  | 591  | 595  | 599  | 603  | 606  | 610  | 614  |
| 0.3 | 0.618  | 622  | 625  | 629  | 633  | 637  | 641  | 644  | 648  | 652  |
| 0.4 | 0.655  | 659  | 663  | 666  | 670  | 674  | 677  | 681  | 684  | 688  |
| 0.5 | 0.692  | 695  | 699  | 702  | 705  | 709  | 712  | 716  | 719  | 722  |
| 0.6 | 0.726  | 729  | 732  | 736  | 739  | 742  | 745  | 749  | 752  | 755  |
| 0.7 | 0.758  | 761  | 764  | 767  | 770  | 773  | 776  | 779  | 782  | 787  |
| 0.8 | 0.788  | 791  | 794  | 797  | 800  | 802  | 805  | 809  | 811  | 813  |
| 0.9 | 0.816  | 819  | 821  | 824  | 826  | 829  | 832  | 834  | 837  | 839  |
| 1.0 | 0.841  | 844  | 846  | 848  | 851  | 853  | 855  | 858  | 860  | 862  |
| 1.1 | 0.864  | 866  | 869  | 871  | 873  | 875  | 877  | 879  | 881  | 883  |
| 1.2 | 0.885  | 887  | 889  | 891  | 893  | 894  | 896  | 898  | 900  | 902  |
| 1.3 | 0.903  | 905  | 907  | 908  | 910  | 911  | 913  | 915  | 916  | 918  |
| 1.4 | 0.919  | 921  | 922  | 924  | 925  | 926  | 928  | 929  | 931  | 932  |
| 1.5 | 0.933  | 935  | 936  | 937  | 938  | 939  | 941  | 942  | 943  | 944  |
| 1.6 | 0.945  | 946  | 947  | 948  | 9495 | 9505 | 9515 | 9525 | 9535 | 9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 9564 | 9573 | 9582 | 9591 | 9599 | 9608 | 9616 | 9625 | 9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 9650 | 9656 | 9664 | 9671 | 9678 | 9686 | 9693 | 9699 | 9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 9719 | 9726 | 9732 | 9738 | 9744 | 9750 | 9756 | 9762 | 9767 |
| 2.0 | 0.9773 | 9778 | 9783 | 9788 | 9793 | 9798 | 9803 | 9808 | 9812 | 9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 9826 | 9830 | 9834 | 9838 | 9842 | 9846 | 9850 | 9854 | 9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 9865 | 9868 | 9871 | 9875 | 9878 | 9881 | 9884 | 9887 | 9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 9896 | 9898 | 9901 | 9904 | 9906 | 9909 | 9911 | 9913 | 9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 9920 | 9922 | 9925 | 9927 | 9929 | 9931 | 9932 | 9934 | 9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 9940 | 9941 | 9943 | 9945 | 9946 | 9948 | 9949 | 9951 | 9952 |
| 2.6 | 0.9954 | 9955 | 9956 | 9957 | 9959 | 9960 | 9961 | 9962 | 9963 | 9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 9966 | 9967 | 9968 | 9969 | 9970 | 9971 | 9972 | 9973 | 9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 9975 | 9976 | 9977 | 9977 | 9978 | 9979 | 9979 | 9980 | 9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 9982 | 9983 | 9983 | 9984 | 9984 | 9985 | 9985 | 9986 | 9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 9987 | 9987 | 9988 | 9988 | 9989 | 9989 | 9989 | 9990 | 9990 |

**הנדסה אנליטית**

**קו ישר**

$y - y_1 = m(x - x_1)$  משוואת ישר דרך  $(x_1, y_1)$  ששיפועו  $m$  :

$\text{tg}\alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$  נוסחה לזווית  $\alpha$  שבין הישרים  $y = m_2 x + n_2$  ,  $y = m_1 x + n_1$  :

$m_1 \cdot m_2 = -1$  ניצבות הישרים  $y = m_2 x + n_2$  ,  $y = m_1 x + n_1$  :

$d = \pm \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$  מרחק הנקודה  $(x_0; y_0)$  מהישר  $Ax + By + C = 0$  :

$\left( \frac{\ell x_1 + kx_2}{k + \ell}, \frac{\ell y_1 + ky_2}{k + \ell} \right)$  נקודה המחלקת את הקטע AB ביחס  $k : \ell$  :  $(A(x_1, y_1); B(x_2, y_2))$

**מעגל**

משוואת המשיק למעגל  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$  בנקודה  $(x_0; y_0)$  :

$(x_0 - a) \cdot (x - a) + (y_0 - b) \cdot (y - b) = R^2$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  **היפרבולה**

$y = \pm \frac{b}{a}x$

האסימפטוטות:

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

מרחק המוקד מהראשית:

$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$

משיק להיפרבולה בנקודה  $(x_0; y_0)$  :

$n^2 = m^2 a^2 - b^2$

התנאי שהישר  $y = mx + n$  ישיק להיפרבולה:

$y^2 = 2px$  **פרבולה**

$yy_0 = p(x + x_0)$

משיק לפרבולה בנקודה  $(x_0; y_0)$  :

$n = \frac{p}{2m}$

התנאי שהישר  $y = mx + n$  ישיק לפרבולה: