

**מדינת ישראל**  
**משרד החינוך התרבות והספורט**

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי ספר על-יסודיים  
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים  
מועד הבחינה: קיץ תשס"ה, 2005  
מספר השאלון: 189, 174, 035202  
נספח: דפי נוסחאות ל-4 ול-5 יחידות לימוד

## **מ ת מ ט י ק ה**

2 יחידות לימוד

השלמה ל-5 יחידות לימוד

### **הוראות לנבחן**

א. משך הבחינה: שעתיים.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה פרק אחד.  
פרק שלישי – הנדסה אנליטית, הנדסת המרחב,  
וקטורים, מספרים מרוכבים,  
פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות –  $(4 \times 25)$  – 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
- (2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.  
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.  
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
- (3) לטיוטה יש להשתמש רק במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים. שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

**ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.**

## **ב ה צ ל ח ה !**

/המשך מעבר לדף/

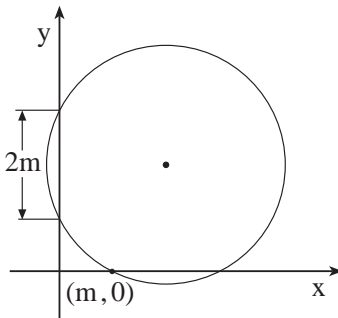
## ה ש א ל ו ת

### פרק שלישי – הנדסה אנליטית, הנדסת המרחב, וקטורים, מספרים מרוכבים, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

(100 נקודות)

פתור ארבע מהשאלות 10-17, מהן לפחות אחת מהשאלות 16-17 (לכל שאלה – 25 נקודות).  
אם תענה על יותר מארבע שאלות, ייבדקו רק ארבע התשובות הראשונות שבמחברתך.

#### הנדסה אנליטית, הנדסת המרחב



10. א. מעגל עובר דרך הנקודה  $(m, 0)$   
ומקצה על ציר ה- $y$  מיתר באורך  $2m$  ( $m > 0$ )  
(ראה ציור).

הבע באמצעות  $m$  את המשוואה של המקום  
הגאומטרי של מרכזי כל המעגלים המקיימים  
תנאים אלה.

ב. איזו צורה הנדסית מתאר המקום הגאומטרי

שאת משוואתו מצאת בסעיף א?

11. נתון טרפז שווה-שוקיים, שמשוואת הבסיס הקטן שלו היא  $x + 2y - 5 = 0$ ,

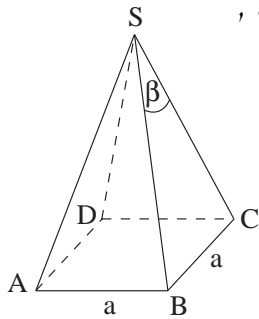
אורך גובהו הוא  $\sqrt{5}$ , והמשכי השוקיים שלו נפגשים בראשית.

א. מצא את משוואת הבסיס הגדול של הטרפז.

ב. נתון גם כי האורך של כל אחת משוקי הטרפז הוא  $\frac{5\sqrt{5}}{4}$ .

(1) מצא את זווית הבסיס של הטרפז.

(2) מצא את המשוואות של שוקי הטרפז.



12. בפירמידה ישרה SABCD הבסיס הוא ריבוע, שאורך צלעו a ,

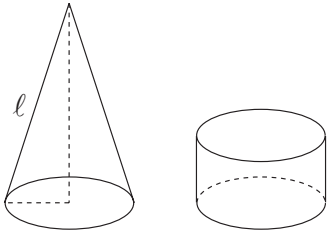
והזווית בין שני מקצועות צדדיים סמוכים היא  $\beta$  (ראה ציור).

הזווית בין שתי פאות צדדיות סמוכות היא  $\alpha$  .

א. הראה כי  $2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{2}$  .

ב. נתון כי  $\alpha = 100^\circ$  .

הבע את שטח הפנים של הפירמידה באמצעות a .



13. הבסיסים של גליל וחרוט שווים בגודלם,

והנפח של הגליל שווה לנפח של החרוט (ראה ציור).

א. בטא את הקו היוצר,  $l$  , של החרוט

באמצעות הרדיוס של בסיס הגליל, r ,

וגובה הגליל, h .

ב. שטח הפנים של הגליל שווה לשטח הפנים של החרוט.

מצא את היחס בין שטח המעטפת של הגליל לשטח המעטפת של החרוט.

### וקטורים

14. א. הנקודה  $A(m, -2, n)$  נמצאת על ישר החיתוך של המישורים:

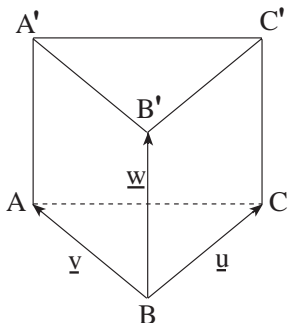
$$\pi_1: 2x - y + 4z = -5$$

$$\pi_2: x + 2y - z = 3$$

חשב את m ואת n .

ב. מצא את המשוואה של המישור  $\pi_3$  , אשר עובר דרך נקודה  $(1, 1, 1)$  ומאונך

לכל אחד מהמישורים  $\pi_1$  ו-  $\pi_2$  .



15. במנסרה ישרה  $ABCA'B'C'$  נסמן:

$$\vec{BC} = \underline{u}, \quad \vec{BA} = \underline{v}, \quad \vec{BB'} = \underline{w}$$

(ראה ציור).

נתון: בסיס המנסרה הוא משולש שווה-צלעות,

$$|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}| = 2$$

הנקודה  $P$  מקיימת  $\vec{BP} = t \vec{BC}$ .

א. עבור אילו ערכי  $t$  המשולש  $APC'$  הוא משולש שווה-שוקיים שבסיסו  $AP$ ?

ב. עבור אילו ערכי  $t$  מתקיים  $\vec{PC'} \perp \vec{PA}$ ?

**שם לב: עליך לענות לפחות על אחת מהשאלות 16-17.**

מספרים מרוכבים, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

16. א. נתונים שני האיברים הראשונים בסדרה הנדסית של מספרים מרוכבים:

$$a_1 = i - 1, \quad a_2 = -2.$$

מצא את  $S_{12}$ .

ב. מצא את כל המספרים המרוכבים  $z$  המקיימים  $|z - 2i| = |z|$ .

(אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.)

17. נתונה הפונקציה  $f(x) = a \ln(e^x - 2) + e^x + 4x$ .

$$f(\ln 5) = 5 + 4 \ln \frac{5}{3}$$

א. מצא את  $a$ .

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.

ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ה. האם למשוואה  $f(x) = 0$  יש פתרון? הסבר.

## **ב ה צ ל ח ה !**

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל  
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך התרבות והספורט

# נוסחאון מתמטיקה

5-4 יחידות לימוד (החל מקיץ תש"ן)

## אלגברה

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$$

פירוק לגורמים

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k + \dots + b^n$$

בינום ניוטון

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

נוסחאות וייטה

$$(x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a})$$

( $x_1, x_2$ ) שורשי משוואה ריבועית.

## סדרות

| סדרה הנדסית                        | סדרה חשבונית                        |               |
|------------------------------------|-------------------------------------|---------------|
| $a_n = a_1 q^{n-1}$                | $a_n = a_1 + (n-1)d$                | האיבר ה-n'י : |
| $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ | $S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$ | הסכום:        |

$$z = a + bi = r(\cos\theta + i \sin\theta)$$

מספרים מרוכבים

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

מכפלה בהצגה קוטבית:

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

משפט דה-מואבר:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left[ \cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) \right] \quad \text{שורשי המשוואה } z^n = r(\cos\alpha + i \sin\alpha) \text{ הם:}$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1$$

## קומבינטוריקה

$$P_n = n!$$

מספר התמורות של n עצמים (בלי חזרות):

מספר התמורות של n עצמים כשמתוכם יש  $n_1, n_2, \dots, n_k$  עצמים שווים ביניהם:

$$P_n = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

מספר החליפות של k מתוך n עצמים (בלי חזרות):

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

מספר הצירופים של k מתוך n עצמים (בלי חזרות):

וקטורים

מישור דרך קצות הווקטורים  $\vec{a} = \vec{OA}$ ,  $\vec{b} = \vec{OB}$ ,  $\vec{c} = \vec{OC}$ :  $\vec{x} = t(\vec{b} - \vec{a}) + s(\vec{c} - \vec{a})$   
 מכפלה סקלרית:  $(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos\alpha$   
 ניצבות:  $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$   
 אורך של וקטור:  $|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

מרחק בין  $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)$  למישור  $\vec{a} \cdot \vec{x} + c = 0$ :  $\frac{|\vec{a} \cdot \vec{z} + c|}{|\vec{a}|}$

זווית בין הישר  $t\vec{b} + \vec{d}$  למישור  $\vec{a} \cdot \vec{x} + c = 0$ :  $\sin\beta = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

זווית בין המישורים  $\vec{a} \cdot \vec{x} + c = 0$ ,  $\vec{b} \cdot \vec{x} + d = 0$ :  $\cos\alpha = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

חוקות ולוגריתמים:  $\log_a a^x = x$ ,  $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

טריגונומטריה

זהויות

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$        $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$

$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$        $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$

$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$        $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$        $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$        $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$

משפט הסינוס:  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$        $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$

שטח גורה:  $\frac{1}{2}r^2\alpha$       אורך קשת של  $\alpha$  רדיאנים:  $r\alpha$

הנדסת המרחב

נפח כדור:  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$       נפח הרוט ופירמידה (B - שטח הבסיס):  $V = \frac{B \cdot h}{3}$

שטח פנים של כדור:  $P = 4\pi R^2$       שטח מעטפת הרוט:  $M = \pi R \ell$

אנליזה (חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי)

נגזרות

$(uv)' = u'v + uv'$        $(x^n)' = nx^{n-1}$        $\sin'x = \cos x$        $\operatorname{arc} \sin'x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - v'u}{v^2}$        $(a^x)' = a^x \ln a$        $\cos'x = -\sin x$        $\operatorname{arc} \cos'x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\log_a'x = \frac{1}{x \ln a}$        $\operatorname{tg}'x = \frac{1}{\cos^2x}$        $\operatorname{arc} \operatorname{tg}'x = \frac{1}{1+x^2}$

כלל השרשרת:  $f'(x) = v'(u) \cdot u'(x)$

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C \quad \text{אינטגרלים}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} [ f(a) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(b) ] \quad \text{כלל הטרפז:}$$

פונקציות

פונקציה זוגית:  $f(x) = f(-x)$       פונקציה אי-זוגית:  $f(-x) = -f(x)$

נקודת פיתול: נקודת מעבר בין קמירות לקעירות      פונקציה קמורה: U

**סטטיסטיקה והסתברות**

$$S = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 f_1 + (x_2 - \bar{x})^2 f_2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 f_n}{N}} \quad \text{סטיית תקן:}$$

$x_n, \dots, x_2, x_1$  השכיחויות של  $f_n, \dots, f_2, f_1$

$f_1 + f_2 + \dots + f_n = N$  ; ממוצע הנתונים  $\bar{x}$

נוסחת ברנולי: ההסתברות לִ  $k$  הצלחות בִ  $n$  נסיונות בהתפלגות בינומית עם הסתברות  $p$ :

$$p_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

**לוח של התפלגות נורמלית (0,1) מצטברת**

| u   | 0      | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    |
|-----|--------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 0.0 | 0.500  | 504  | 508  | 512  | 516  | 520  | 524  | 528  | 532  | 536  |
| 0.1 | 0.540  | 544  | 548  | 552  | 556  | 560  | 564  | 568  | 571  | 575  |
| 0.2 | 0.579  | 583  | 587  | 591  | 595  | 599  | 603  | 606  | 610  | 614  |
| 0.3 | 0.618  | 622  | 625  | 629  | 633  | 637  | 641  | 644  | 648  | 652  |
| 0.4 | 0.655  | 659  | 663  | 666  | 670  | 674  | 677  | 681  | 684  | 688  |
| 0.5 | 0.692  | 695  | 699  | 702  | 705  | 709  | 712  | 716  | 719  | 722  |
| 0.6 | 0.726  | 729  | 732  | 736  | 739  | 742  | 745  | 749  | 752  | 755  |
| 0.7 | 0.758  | 761  | 764  | 767  | 770  | 773  | 776  | 779  | 782  | 787  |
| 0.8 | 0.788  | 791  | 794  | 797  | 800  | 802  | 805  | 809  | 811  | 813  |
| 0.9 | 0.816  | 819  | 821  | 824  | 826  | 829  | 832  | 834  | 837  | 839  |
| 1.0 | 0.841  | 844  | 846  | 848  | 851  | 853  | 855  | 858  | 860  | 862  |
| 1.1 | 0.864  | 866  | 869  | 871  | 873  | 875  | 877  | 879  | 881  | 883  |
| 1.2 | 0.885  | 887  | 889  | 891  | 893  | 894  | 896  | 898  | 900  | 902  |
| 1.3 | 0.903  | 905  | 907  | 908  | 910  | 911  | 913  | 915  | 916  | 918  |
| 1.4 | 0.919  | 921  | 922  | 924  | 925  | 926  | 928  | 929  | 931  | 932  |
| 1.5 | 0.933  | 935  | 936  | 937  | 938  | 939  | 941  | 942  | 943  | 944  |
| 1.6 | 0.945  | 946  | 947  | 948  | 9495 | 9505 | 9515 | 9525 | 9535 | 9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 9564 | 9573 | 9582 | 9591 | 9599 | 9608 | 9616 | 9625 | 9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 9650 | 9656 | 9664 | 9671 | 9678 | 9686 | 9693 | 9699 | 9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 9719 | 9726 | 9732 | 9738 | 9744 | 9750 | 9756 | 9762 | 9767 |
| 2.0 | 0.9773 | 9778 | 9783 | 9788 | 9793 | 9798 | 9803 | 9808 | 9812 | 9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 9826 | 9830 | 9834 | 9838 | 9842 | 9846 | 9850 | 9854 | 9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 9865 | 9868 | 9871 | 9875 | 9878 | 9881 | 9884 | 9887 | 9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 9896 | 9898 | 9901 | 9904 | 9906 | 9909 | 9911 | 9913 | 9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 9920 | 9922 | 9925 | 9927 | 9929 | 9931 | 9932 | 9934 | 9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 9940 | 9941 | 9943 | 9945 | 9946 | 9948 | 9949 | 9951 | 9952 |
| 2.6 | 0.9954 | 9955 | 9956 | 9957 | 9959 | 9960 | 9961 | 9962 | 9963 | 9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 9966 | 9967 | 9968 | 9969 | 9970 | 9971 | 9972 | 9973 | 9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 9975 | 9976 | 9977 | 9977 | 9978 | 9979 | 9979 | 9980 | 9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 9982 | 9983 | 9983 | 9984 | 9984 | 9985 | 9985 | 9986 | 9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 9987 | 9987 | 9988 | 9988 | 9989 | 9989 | 9989 | 9990 | 9990 |



הנדסה אנליטית

קו ישר

$y - y_1 = m(x - x_1)$  משוואת ישר דרך  $(x_1, y_1)$  ששיפועו  $m$  :

$\text{tg}\alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$  נוסחה לזווית  $\alpha$  שבין הישרים  $y = m_2 x + n_2$ ,  $y = m_1 x + n_1$  :

$m_1 \cdot m_2 = -1$  ניצבות הישרים  $y = m_2 x + n_2$ ,  $y = m_1 x + n_1$  :

$d = \pm \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$  מרחק הנקודה  $(x_0; y_0)$  מהישר  $Ax + By + C = 0$  :

$\left( \frac{\ell x_1 + kx_2}{k + \ell}, \frac{\ell y_1 + ky_2}{k + \ell} \right) : (A(x_1, y_1); B(x_2, y_2))$   $k : \ell$  ביחס AB הקטע את המחלקת נקודה המחלקת את הקטע

מעגל

משוואת המשיק למעגל  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$  בנקודה  $(x_0; y_0)$  :

$(x_0 - a) \cdot (x - a) + (y_0 - b) \cdot (y - b) = R^2$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  היפרבולה

$y = \pm \frac{b}{a}x$

האסימפטוטות:

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

מרחק המוקד מהראשית:

$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$

משיק להיפרבולה בנקודה  $(x_0; y_0)$  :

$n^2 = m^2 a^2 - b^2$

התנאי שהישר  $y = mx + n$  ישיק להיפרבולה:

$y^2 = 2px$  פרבולה

$yy_0 = p(x + x_0)$

משיק לפרבולה בנקודה  $(x_0; y_0)$  :

$n = \frac{p}{2m}$

התנאי שהישר  $y = mx + n$  ישיק לפרבולה: