

מתמטיקה

3 יחידות לימוד מתוך 4 יחידות לימוד

הוראות לנבחן

- א. משך הבחינה: שלוש שעות.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים.
פרק ראשון – הנדסת המישור, אלגברה – $(16 \frac{2}{3} \times 3)$ – 50 נקודות
פרק שני – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי, טריגונומטריה, הסתברות
וסטטיסטיקה – $(16 \frac{2}{3} \times 3)$ – 50 נקודות
סה"כ – 100 נקודות
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
(2) דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות:
(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
(3) לטיוטה יש להשתמש רק במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

/המשך מעבר לדף/

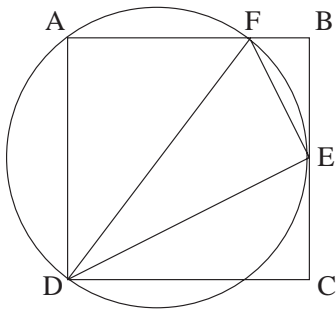
ה ש א ל ו ת

פרק ראשון – הנדסת המישור, אלגברה (50 נקודות)

פתור שלוש מהשאלות 1-4 (לכל שאלה – $16\frac{2}{3}$ נקודות).
אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

הנדסת המישור

1. הקדקודים A ו- D של הריבוע ABCD נמצאים על מעגל.



הצלע BC משיקה למעגל בנקודה E.

הצלע AB חותכת את המעגל בנקודה F (ראה ציור).

א. הוכח: $\angle DEF = 90^\circ$.

ב. הוכח: $\triangle DEF \sim \triangle EBF$.

ג. נתון: $BF = 3$ ס"מ, $DF = 12$ ס"מ.

מצא את EF.

אלגברה

2. בסדרה חשבונית $2n$ איברים. סכום n האיברים האחרונים גדול פי 3

מסכום n האיברים הראשונים.

א. הבע את הפרש הסדרה, d , באמצעות האיבר הראשון שלה, a_1 .

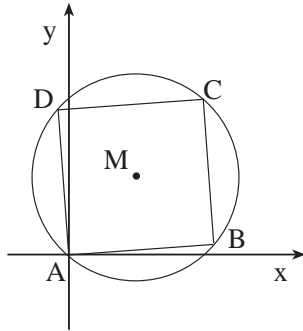
ב. נתון כי האיבר האחרון בסדרה קטן ב-2 מסכום שני האיברים האמצעיים.

חשב את d .

3. הוכח באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי הביטוי $3^{3n-2} + 3^{6n-4} + 1$ מתחלק ב-13

בלי שארית, לכל n טבעי.

/המשך בעמוד 3/



4. הריבוע ABCD חסום במעגל שמרכזו M .
 קדקוד A בראשית הצירים (ראה ציור).
 משוואת האלכסון BD היא

$$y = -\frac{1}{2}x + 5$$

 א. מצא את משוואת המעגל.
 ב. מצא את שיעורי הקדקודים B ו-D .

פרק שני – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי, טריגונומטריה,

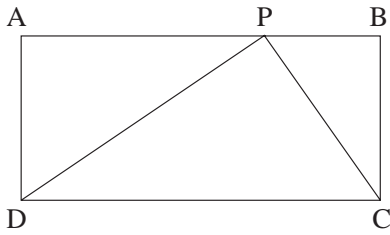
הסתברות וסטטיסטיקה (50 נקודות)

פתור שלוש מהשאלות 5-10 (לכל שאלה – $16\frac{2}{3}$ נקודות).
 אם תענה על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתך.

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי, טריגונומטריה

5. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2 - a}$.
 ידוע כי לפונקציה נקודת קיצון ב- $x = -4$.
 א. חשב את הערך של הפרמטר a .
 ב. הצב את a בפונקציה f(x) .

- (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- (2) חשב את נקודות הקיצון, וקבע את סוגן.
- (3) חשב את נקודות החיתוך עם הצירים.
- (4) מצא אסימפטוטות מקבילות לצירים.
- (5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.



6. ABCD הוא מלבן.

P נקודה כלשהי על הצלע AB (ראה ציור).

נתון: $AD = a$, $AB = b$.

נסמן $AP = x$.

א. מצא את x שעבורו סכום ריבועי המרחקים של P מהקדקודים C ו-D

הוא מינימלי. (הבע באמצעות b).

ב. עבור P שקיבלת בסעיף א, איזה סוג משולש הוא המשולש DPC?

7. נתון גרף הפונקציה $f(x) = -x^2 + bx$ ($b > 0$).

בנקודה A שבה $x = 4$ עובר משיק לגרף הפונקציה ששיפועו -2

(ראה ציור).

א. מצא את ערך הפרמטר b , ואת שיעורי הנקודה A.

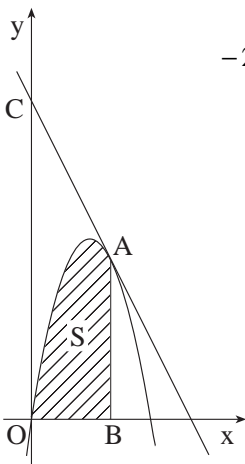
ב. מצא את משוואת המשיק הנתון.

ג. מנקודה A הורידו אנך לציר ה- x

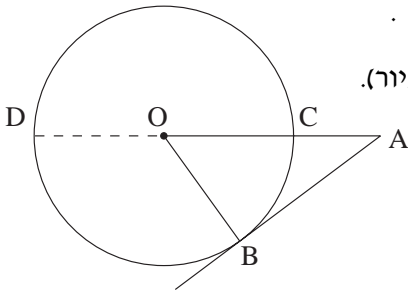
והוא חותך את ציר ה- x בנקודה B.

המשיק חותך את ציר ה- y בנקודה C.

חשב את היחס שבין שטח הטרפז ABOC ובין השטח המקווקו, S.



/המשך בעמוד 5/



8. הקטע AB משיק בנקודה B למעגל שמרכזו O .
הקטע AO חותך את המעגל בנקודה C (ראה ציור).
נתון: $AC = 2$ ס"מ
 $\angle BAO = 37^\circ$
א. חשב את רדיוס המעגל.
ב. המשך הקטע AO חותך את המעגל בנקודה D (ראה ציור).
חשב את אורך BD .

הסתברות וסטטיסטיקה

9. כדי להתקבל לאוניברסיטה, המועמדים נדרשים לעבור מבחן כניסה.
ציון המעבר במבחן הוא 75 . השנה נערכו שני מבחני כניסה לאוניברסיטה.
80% מהמועמדים נבחנו במבחן הראשון, ושאר המועמדים נבחנו במבחן השני.
התפלגות הציונים בשני המבחנים הייתה נורמלית.
במבחן הראשון היה הציון הממוצע 70 , וסטיית התקן הייתה 10 .
במבחן השני היה הציון הממוצע 79 , וסטיית התקן הייתה 12 .
א. בוחרים באקראי מועמד שנבחן במבחן הראשון.
מהי ההסתברות שהוא עבר את המבחן?
ב. בוחרים באקראי מועמד שנבחן במבחן השני.
מהי ההסתברות שהוא עבר את המבחן?
ג. בוחרים באקראי מועמד שנבחן באחד מהמבחנים.
מהי ההסתברות שהוא עבר את המבחן?

10. במדינה מסוימת ידוע שמספר התושבים שיש להם רישיון נהיגה גדול פי 3 ממספר התושבים שאין להם רישיון נהיגה. בוחרים באקראי ב- 4 תושבים.
- א. מהי ההסתברות שלכל ה- 4 יש רישיון נהיגה?
- ב. מהי ההסתברות שלפחות לתושב אחד מ- 4 התושבים שנבחרו יש רישיון נהיגה ולפחות לאחד מהם אין רישיון נהיגה?

ב ה צ ל ח ה !

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך התרבות והספורט

נוסחאון מתמטיקה

5-4 יחידות לימוד (החל מקיץ תש"ן)

אלגברה

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$$

פירוק לגורמים

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k + \dots + b^n$$

בינום ניוטון

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

נוסחאות וייטה

$$(x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a})$$

(x_1, x_2) שורשי משוואה ריבועית.

סדרות

| סדרה הנדסית | סדרה חשבונית | |
|------------------------------------|-------------------------------------|---------------|
| $a_n = a_1 q^{n-1}$ | $a_n = a_1 + (n-1)d$ | האיבר ה-n'י : |
| $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ | $S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$ | הסכום: |

$$z = a + bi = r(\cos\theta + i \sin\theta)$$

מספרים מרוכבים

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

מכפלה בהצגה קוטבית:

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

משפט דה-מואבר:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) \right] \quad \text{שורשי המשוואה } z^n = r(\cos\alpha + i \sin\alpha) \text{ הם:}$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1$$

קומבינטוריקה

$$P_n = n!$$

מספר התמורות של n עצמים (בלי חזרות):

מספר התמורות של n עצמים כשמתוכם יש n_1, n_2, \dots, n_k עצמים שווים ביניהם:

$$P_n = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

מספר החליפות של k מתוך n עצמים (בלי חזרות):

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

מספר הצירופים של k מתוך n עצמים (בלי חזרות):

וקטורים

מישור דרך קצות הווקטורים $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$, $\vec{c} = \vec{OC}$: $\vec{x} = t(\vec{b} - \vec{a}) + s(\vec{c} - \vec{a})$
 מכפלה סקלרית: $(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos\alpha$
 ניצבות: $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$
 אורך של וקטור: $|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

מרחק בין $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)$ למישור $\vec{a} \cdot \vec{x} + c = 0$: $\frac{|\vec{a} \cdot \vec{z} + c|}{|\vec{a}|}$

זווית בין הישר $t\vec{b} + \vec{d}$ למישור $\vec{a} \cdot \vec{x} + c = 0$: $\sin\beta = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

זווית בין המישורים $\vec{a} \cdot \vec{x} + c = 0$, $\vec{b} \cdot \vec{x} + d = 0$: $\cos\alpha = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

חוקות ולוגריתמים: $\log_a a^x = x$, $a^{\log_a x} = x$, $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

טריגונומטריה

זהויות

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$

$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$ $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$

$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$ $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$

משפט הסינוס: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$

שטח גזרה: $\frac{1}{2}r^2\alpha$ אורך קשת של α רדיאנים: $r\alpha$

הנדסת המרחב

נפח כדור: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ נפח הרוט ופירמידה (B - שטח הבסיס): $V = \frac{B \cdot h}{3}$

שטח פנים של כדור: $P = 4\pi R^2$ שטח מעטפת הרוט: $M = \pi R \ell$

אנליזה (חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי)

נגזרות

$(uv)' = u'v + uv'$ $(x^n)' = nx^{n-1}$ $\sin'x = \cos x$ $\operatorname{arc} \sin'x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - v'u}{v^2}$ $(a^x)' = a^x \ln a$ $\cos'x = -\sin x$ $\operatorname{arc} \cos'x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\log_a'x = \frac{1}{x \ln a}$ $\operatorname{tg}'x = \frac{1}{\cos^2x}$ $\operatorname{arc} \operatorname{tg}'x = \frac{1}{1+x^2}$

כלל השרשרת: $f'(x) = v'(u) \cdot u'(x)$

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

אינטגרלים

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} [f(a) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(b)]$$

כלל הטרוז:

פונקציות

$f(-x) = -f(x)$: פונקציה אי-זוגית:

$f(x) = f(-x)$

פונקציה זוגית:

U : פונקציה קמורה:

נקודת פיתול: נקודת מעבר בין קמירות לקעירות

סטטיסטיקה וחסתברות

$$S = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 f_1 + (x_2 - \bar{x})^2 f_2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 f_n}{N}}$$

סטיית תקן:

x_n, \dots, x_2, x_1 השכיחויות של f_n, \dots, f_2, f_1

$f_1 + f_2 + \dots + f_n = N$; ממוצע הנתונים \bar{x}

נוסחת ברנולי: החסתברות ל k הצלחות ב n נסיונות בהתפלגות בינומית עם הסתברות p :

$$p_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

לוח של חתפלגות נורמלית (0,1) מצטברת

| u | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-----|--------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 0.0 | 0.500 | 504 | 508 | 512 | 516 | 520 | 524 | 528 | 532 | 536 |
| 0.1 | 0.540 | 544 | 548 | 552 | 556 | 560 | 564 | 568 | 571 | 575 |
| 0.2 | 0.579 | 583 | 587 | 591 | 595 | 599 | 603 | 606 | 610 | 614 |
| 0.3 | 0.618 | 622 | 625 | 629 | 633 | 637 | 641 | 644 | 648 | 652 |
| 0.4 | 0.655 | 659 | 663 | 666 | 670 | 674 | 677 | 681 | 684 | 688 |
| 0.5 | 0.692 | 695 | 699 | 702 | 705 | 709 | 712 | 716 | 719 | 722 |
| 0.6 | 0.726 | 729 | 732 | 736 | 739 | 742 | 745 | 749 | 752 | 755 |
| 0.7 | 0.758 | 761 | 764 | 767 | 770 | 773 | 776 | 779 | 782 | 787 |
| 0.8 | 0.788 | 791 | 794 | 797 | 800 | 802 | 805 | 809 | 811 | 813 |
| 0.9 | 0.816 | 819 | 821 | 824 | 826 | 829 | 832 | 834 | 837 | 839 |
| 1.0 | 0.841 | 844 | 846 | 848 | 851 | 853 | 855 | 858 | 860 | 862 |
| 1.1 | 0.864 | 866 | 869 | 871 | 873 | 875 | 877 | 879 | 881 | 883 |
| 1.2 | 0.885 | 887 | 889 | 891 | 893 | 894 | 896 | 898 | 900 | 902 |
| 1.3 | 0.903 | 905 | 907 | 908 | 910 | 911 | 913 | 915 | 916 | 918 |
| 1.4 | 0.919 | 921 | 922 | 924 | 925 | 926 | 928 | 929 | 931 | 932 |
| 1.5 | 0.933 | 935 | 936 | 937 | 938 | 939 | 941 | 942 | 943 | 944 |
| 1.6 | 0.945 | 946 | 947 | 948 | 9495 | 9505 | 9515 | 9525 | 9535 | 9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 9564 | 9573 | 9582 | 9591 | 9599 | 9608 | 9616 | 9625 | 9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 9650 | 9656 | 9664 | 9671 | 9678 | 9686 | 9693 | 9699 | 9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 9719 | 9726 | 9732 | 9738 | 9744 | 9750 | 9756 | 9762 | 9767 |
| 2.0 | 0.9773 | 9778 | 9783 | 9788 | 9793 | 9798 | 9803 | 9808 | 9812 | 9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 9826 | 9830 | 9834 | 9838 | 9842 | 9846 | 9850 | 9854 | 9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 9865 | 9868 | 9871 | 9875 | 9878 | 9881 | 9884 | 9887 | 9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 9896 | 9898 | 9901 | 9904 | 9906 | 9909 | 9911 | 9913 | 9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 9920 | 9922 | 9925 | 9927 | 9929 | 9931 | 9932 | 9934 | 9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 9940 | 9941 | 9943 | 9945 | 9946 | 9948 | 9949 | 9951 | 9952 |
| 2.6 | 0.9954 | 9955 | 9956 | 9957 | 9959 | 9960 | 9961 | 9962 | 9963 | 9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 9966 | 9967 | 9968 | 9969 | 9970 | 9971 | 9972 | 9973 | 9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 9975 | 9976 | 9977 | 9977 | 9978 | 9979 | 9979 | 9980 | 9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 9982 | 9983 | 9983 | 9984 | 9984 | 9985 | 9985 | 9986 | 9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 9987 | 9987 | 9988 | 9988 | 9989 | 9989 | 9989 | 9990 | 9990 |

הנדסה אנליטית

קו ישר

$y - y_1 = m(x - x_1)$ משוואת ישר דרך (x_1, y_1) ששיפועו m :

$\text{tg}\alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$ נוסחה לזווית α שבין הישרים $y = m_2 x + n_2$, $y = m_1 x + n_1$:

$m_1 \cdot m_2 = -1$ ניצבות הישרים $y = m_2 x + n_2$, $y = m_1 x + n_1$:

$d = \pm \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ מרחק הנקודה $(x_0; y_0)$ מהישר $Ax + By + C = 0$:

$\left(\frac{\ell x_1 + kx_2}{k + \ell}, \frac{\ell y_1 + ky_2}{k + \ell} \right)$ נקודה המחלקת את הקטע AB ביחס $k : \ell$ $(A(x_1, y_1); B(x_2, y_2))$:

מעגל

משוואת המשיק למעגל $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ בנקודה $(x_0; y_0)$:

$$(x_0 - a) \cdot (x - a) + (y_0 - b) \cdot (y - b) = R^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{היפרבולה}$$

$y = \pm \frac{b}{a}x$ האסימפטוטות:

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ מרחק המוקד מהראשית:

$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$ משיק להיפרבולה בנקודה $(x_0; y_0)$:

$n^2 = m^2 a^2 - b^2$ התנאי שהישר $y = mx + n$ ישיק להיפרבולה:

$$y^2 = 2px \quad \text{פרבולה}$$

$yy_0 = p(x + x_0)$ משיק לפרבולה בנקודה $(x_0; y_0)$:

$n = \frac{p}{2m}$ התנאי שהישר $y = mx + n$ ישיק לפרבולה: