

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי-ספר על-יסודיים
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים
מועד הבחינה: תשס"ב, מועד ב
מספר השאלון: 186, 171, 035302
נספח: דפי נוסחאות ל-4 ול-5 יחידות לימוד

מתמטיקה

3 יחידות לימוד מתוך 4 יחידות לימוד

הוראות לנבחן

- א. משך הבחינה: שלוש שעות.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים.
פרק ראשון – הנדסת המישור, אלגברה – $(16 \frac{2}{3} \times 3)$ – 50 נקודות
פרק שני – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי, טריגונומטריה, הסתברות
וסטטיסטיקה – $(16 \frac{2}{3} \times 3)$ – 50 נקודות
סה"כ – 100 נקודות
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות:
1. אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
2. התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפסילת הבחינה או לפגיעה בציון.
3. טיוטה יש לרשום רק במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמסגיחים. שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

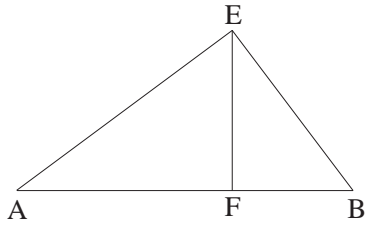
בהצלחה!

ה ש א ל ו ת

פרק ראשון – הנדסת המישור, אלגברה (50 נקודות)

פתור שלוש מהשאלות 1-4 (לכל שאלה – $16\frac{2}{3}$ נקודות).

הנדסת המישור



1. במשולש ישר-זווית AEB ($\angle AEB = 90^\circ$)
 - א. הוכח: $EF^2 = FB \cdot AF$.
 - ב. נתון: $FB = 3$ ס"מ, $EB = 5$ ס"מ.
חשב את אורך הצלע AB .

אלגברה

2. הישר $4x - 3y + 24 = 0$ חותך את ציר ה- x בנקודה A ואת ציר ה- y בנקודה B .
 - א. מצא את משוואת המעגל.
 - ב. הראה שהמעגל עובר דרך ראשית הצירים.
 - ג. מצא את משוואת הישר המשיק למעגל בנקודת ראשית הצירים.

תזכורת: משיק למעגל מאונך לרדיוס המעגל העובר דרך נקודת ההשקה.

3. בסדרה חשבונית עולה, שלושת האיברים הראשונים הם a_1 , a_2 , a_3 .

נתון כי סכום שלושת האיברים האלה הוא 21.

א. מצא את a_2 .

ב. נתון גם כי המספרים $a_1 - 1$, $a_2 - 1$, $a_3 + 2$ הם שלושה איברים

עוקבים בסדרה הנדסית.

מצא את שלושת האיברים האלה של הסדרה ההנדסית.

4. א. הוכח באינדוקציה או בדרך אחרת כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(n+3) \cdot (n+4)} = \frac{n}{4(n+4)}$$

ב. נתון שסכום n המחוברים הראשונים של הטור שבסעיף א הוא $\frac{1}{5}$.

חשב את המחובר ה- n בטור.

פרק שני – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי, טריגונומטריה,

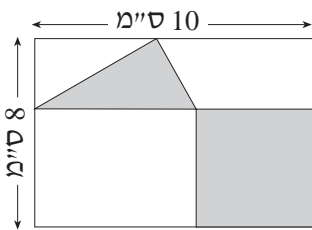
הסתברות וסטטיסטיקה (50 נקודות)

פתור שלוש מהשאלות 5-10 (לכל שאלה – $16\frac{2}{3}$ נקודות).

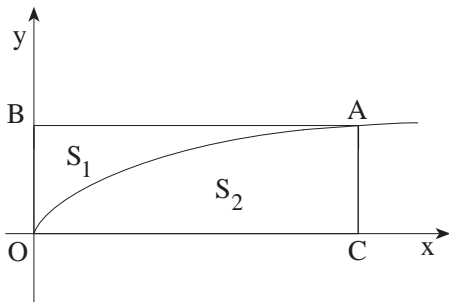
חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי, טריגונומטריה

5. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{12 - 4x}{(x - 2)^2}$.

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.



6. בתוך מלבן שאורכו 10 ס"מ ורוחבו 8 ס"מ חסומים ריבוע ומשולש המסומנים באפור, כמתואר בציור. מהו סכום השטחים המינימלי של הריבוע והמשולש האפורים?



7. במלבן $ABOC$ מתקיים: $AB = 3AC$.

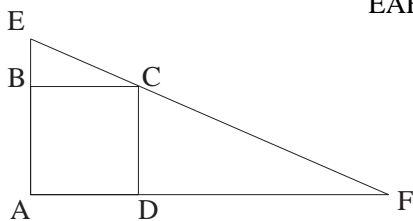
שתיים מצלעות המלבן מונחות על הצירים, כמתואר בציור.

גרף הפונקציה $y = \sqrt{x}$ עובר דרך הקדקודים A ו- O .

הגרף מחלק את שטח המלבן לשני שטחים, S_1 ו- S_2 (ראה ציור).

א. מצא את שיעורי הקדקוד A .

ב. הראה כי $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{2}$.



8. $ABCD$ הוא ריבוע החסום במשולש ישר-זווית EAF

($\angle EAF = 90^\circ$), כמתואר בציור.

נתון: אורך אלכסון הריבוע הוא d ,

$\angle AEF = 57^\circ$.

א. הבע באמצעות d את אורך צלע הריבוע.

ב. הבע באמצעות d את שטח המשולש EAF .

הסתברות וסטטיסטיקה

9. הגבהים של תושבי מדינה מסוימת מתפלגים נורמלית.
ממוצע הגבהים הוא 174 ס"מ, וסטיית התקן היא 16 ס"מ.
- א. בוחרים באקראי תושב אחד.
מהי ההסתברות שגובהו יהיה בין 154 ס"מ ל- 186 ס"מ?
- ב. בוחרים באקראי שני תושבים.
מהי ההסתברות שהגובה של אחד מהם יהיה גבוה מ- 186 ס"מ והגובה של האחר יהיה נמוך מ- 154 ס"מ?
10. ידוע שההסתברות שצלף יפגע במטרה בירייה בודדת גדולה פי 4 מההסתברות שהוא יחטיא בירייה בודדת.
הצלף יורה למטרה 5 יריות.
- א. מהי ההסתברות שהצלף יפגע במטרה בדיוק בשתי יריות?
- ב. מהי ההסתברות שהצלף יחטיא את המטרה לפחות בשלוש יריות?

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

נוסחאון מתמטיקה

5-4 יחידות לימוד (החל מקיץ תש"ן)

אלגברה

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$$

פירוק לגורמים

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k + \dots + b^n$$

בינום ניוטון

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

נוסחאות וייטה

$$(x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a})$$

(x_1, x_2) שורשי משוואה ריבועית.

סדרות

| סדרה הנדסית | סדרה חשבונית | |
|------------------------------------|-------------------------------------|---------------|
| $a_n = a_1 q^{n-1}$ | $a_n = a_1 + (n-1)d$ | האיבר ה-n י : |
| $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ | $S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$ | הסכום: |

$$z = a + bi = r(\cos\theta + i \sin\theta)$$

מספרים מרוכבים

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

מכפלה בהצגה קוטבית:

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

משפט דה־מואבר:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) \right] \quad \text{שורשי המשוואה } z^n = r(\cos\alpha + i \sin\alpha) \text{ הם:}$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1$$

קומבינטוריקה

$$P_n = n!$$

מספר התמורות של n עצמים (בלי חזרות):

מספר התמורות של n עצמים כשמתוכם יש n_1, n_2, \dots, n_k עצמים שווים ביניהם:

$$P_n = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

מספר החליפות של k מתוך n עצמים (בלי חזרות):

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

מספר הצירופים של k מתוך n עצמים (בלי חזרות):

וקטורים

מישור דרך קצות הווקטורים $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$, $\vec{c} = \vec{OC}$: $\vec{x} = a + t(b - a) + s(c - a)$
 מכפלה סקלרית: $(x, y) = \vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos \alpha$
 ניצבות: $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$
 אורך של וקטור: $|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

מרחק בין $z = (z_1, z_2, z_3)$ למישור $a \cdot x + c = 0$: $\frac{|a \cdot z + c|}{|a|}$

זווית בין הישר $t \cdot x + d = 0$ למישור $a \cdot x + c = 0$: $\sin \beta = \frac{|a \cdot b|}{|a| \cdot |b|}$

זווית בין המישורים $a \cdot x + c = 0$, $b \cdot x + d = 0$: $\cos \alpha = \frac{|a \cdot b|}{|a| \cdot |b|}$

חוקות ולוגריתמים $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$, $a^{\log_a x} = \log_a(a^x) = x$

טריגונומטריה

זהויות

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$

$\text{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\text{tg} \alpha \pm \text{tg} \beta}{1 \mp \text{tg} \alpha \text{tg} \beta}$

$\text{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$

$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$

$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$

$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$

$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$

משפט הקוסינוס: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$
 שטח גורה: $\frac{1}{2} r^2 \alpha$

משפט הסינוס: $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$
 אורך קשת של α רדיאנים: $r \alpha$

הנדסת המרחב

נפח כדור: $V = \frac{4}{3} \pi R^3$

נפח חרוט ופירמידה (B - שטח הבסיס): $V = \frac{B \cdot h}{3}$

שטח פנים של כדור: $P = 4\pi R^2$

שטח מעטפת חרוט: $M = \pi R l$

אנליזה (חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי)

נגזרות

$(uv)' = u'v + uv'$ $(x^n)' = nx^{n-1}$

$\sin' x = \cos x$

$\text{arc sin}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - v'u}{v^2}$ $(a^x)' = a^x \ln a$

$\cos' x = -\sin x$

$\text{arc cos}' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\log_a' x = \frac{1}{x \ln a}$

$\text{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$\text{arc tg}' x = \frac{1}{1+x^2}$

כלל השרשרת: $f'(x) = v'(u) \cdot u'(x)$

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

אינטגרלים

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} [f(a) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(b)]$$

כלל הטורפים:

פונקציות

$f(-x) = -f(x)$ פונקציה אי-זוגית:

$f(x) = f(-x)$

פונקציה זוגית:

U פונקציה קמורה:

נקודת פיתול: נקודת מעבר בין קמירות לקעירות

סטטיסטיקה והסתברות

$$S = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 f_1 + (x_2 - \bar{x})^2 f_2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 f_n}{N}}$$

סטיית תקן:

x_1, \dots, x_2, x_1 השכיחויות של f_1, \dots, f_2, f_1

$f_1 + f_2 + \dots + f_n = N$; ממוצע הנתונים \bar{x}

נוסחת ברנולי: ההסתברות ל־k הצלחות ב־n ניסיונות בהתפלגות בינומית עם הסתברות p:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

לוח של התפלגות נורמלית (0,1) מצטברת

| u | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-----|--------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 0.0 | 0.500 | 504 | 508 | 512 | 516 | 520 | 524 | 528 | 532 | 536 |
| 0.1 | 0.540 | 544 | 548 | 552 | 556 | 560 | 564 | 568 | 571 | 575 |
| 0.2 | 0.579 | 583 | 587 | 591 | 595 | 599 | 603 | 606 | 610 | 614 |
| 0.3 | 0.618 | 622 | 625 | 629 | 633 | 637 | 641 | 644 | 648 | 652 |
| 0.4 | 0.655 | 659 | 663 | 666 | 670 | 674 | 677 | 681 | 684 | 688 |
| 0.5 | 0.692 | 695 | 699 | 702 | 705 | 709 | 712 | 716 | 719 | 722 |
| 0.6 | 0.726 | 729 | 732 | 736 | 739 | 742 | 745 | 749 | 752 | 755 |
| 0.7 | 0.758 | 761 | 764 | 767 | 770 | 773 | 776 | 779 | 782 | 787 |
| 0.8 | 0.788 | 791 | 794 | 797 | 800 | 802 | 805 | 809 | 811 | 813 |
| 0.9 | 0.816 | 819 | 821 | 824 | 826 | 829 | 832 | 834 | 837 | 839 |
| 1.0 | 0.841 | 844 | 846 | 848 | 851 | 853 | 855 | 858 | 860 | 862 |
| 1.1 | 0.864 | 866 | 869 | 871 | 873 | 875 | 877 | 879 | 881 | 883 |
| 1.2 | 0.885 | 887 | 889 | 891 | 893 | 894 | 896 | 898 | 900 | 902 |
| 1.3 | 0.903 | 905 | 907 | 908 | 910 | 911 | 913 | 915 | 916 | 918 |
| 1.4 | 0.919 | 921 | 922 | 924 | 925 | 926 | 928 | 929 | 931 | 932 |
| 1.5 | 0.933 | 935 | 936 | 937 | 938 | 939 | 941 | 942 | 943 | 944 |
| 1.6 | 0.945 | 946 | 947 | 948 | 9495 | 9505 | 9515 | 9525 | 9535 | 9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 9564 | 9573 | 9582 | 9591 | 9599 | 9608 | 9616 | 9625 | 9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 9650 | 9656 | 9664 | 9671 | 9678 | 9686 | 9693 | 9699 | 9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 9719 | 9726 | 9732 | 9738 | 9744 | 9750 | 9756 | 9762 | 9767 |
| 2.0 | 0.9773 | 9778 | 9783 | 9788 | 9793 | 9798 | 9803 | 9808 | 9812 | 9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 9826 | 9830 | 9834 | 9838 | 9842 | 9846 | 9850 | 9854 | 9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 9865 | 9868 | 9871 | 9875 | 9878 | 9881 | 9884 | 9887 | 9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 9896 | 9898 | 9901 | 9904 | 9906 | 9909 | 9911 | 9913 | 9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 9920 | 9922 | 9925 | 9927 | 9929 | 9931 | 9932 | 9934 | 9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 9940 | 9941 | 9943 | 9945 | 9946 | 9948 | 9949 | 9951 | 9952 |
| 2.6 | 0.9954 | 9955 | 9956 | 9957 | 9959 | 9960 | 9961 | 9962 | 9963 | 9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 9966 | 9967 | 9968 | 9969 | 9970 | 9971 | 9972 | 9973 | 9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 9975 | 9976 | 9977 | 9977 | 9978 | 9979 | 9979 | 9980 | 9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 9982 | 9983 | 9983 | 9984 | 9984 | 9985 | 9985 | 9986 | 9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 9987 | 9987 | 9988 | 9988 | 9989 | 9989 | 9989 | 9990 | 9990 |

הנדסה אנליטית

קו ישר

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

משוואת ישר דרך (x_1, y_1) ששיפועו m :

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

נוסחה לזווית α שבין הישרים $y = m_2 x + n_2$, $y = m_1 x + n_1$:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

ניצבות הישרים $y = m_2 x + n_2$, $y = m_1 x + n_1$:

$$d = \pm \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

מרחק הנקודה $(x_0; y_0)$ מהישר $Ax + By + C = 0$:

$$\left(\frac{\ell x_1 + k x_2}{k + \ell}, \frac{\ell y_1 + k y_2}{k + \ell} \right) : (A(x_1, y_1); B(x_2, y_2)) \quad k : \ell \text{ ביחס } AB \text{ הקטע}$$

מעגל

משוואת המשיק למעגל $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ בנקודה $(x_0; y_0)$:

$$(x_0 - a) \cdot (x - a) + (y_0 - b) \cdot (y - b) = R^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{היפרבולה}$$

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

האסימפטוטות:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

מרחק המוקד מהראשית:

$$\frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} = 1$$

משיק להיפרבולה בנקודה $(x_0; y_0)$:

$$n^2 = m^2 a^2 - b^2$$

התנאי שהישר $y = mx + n$ ישיק להיפרבולה:

$$y^2 = 2px \quad \text{פרבולה}$$

$$y y_0 = p(x + x_0)$$

משיק לפרבולה בנקודה $(x_0; y_0)$:

$$n = \frac{p}{2m}$$

התנאי שהישר $y = mx + n$ ישיק לפרבולה: