

א. סוג הבחינה: בגרות לבתי-ספר על-יסודיים

ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים

מועד הבחינה: תשס"ב, מועד ב

מספר השאלון: 189, 174, 035202

נספח: דפי נוסחאות ל-4 ול-5 יחידות לימוד

מתמטיקה

2 יחידות לימוד

השלמה ל-5 יחידות לימוד

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעתיים.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה פרק אחד.

פרק שלישי – הנדסה אנליטית, הנדסת המרחב,

וקטורים, מספרים מרוכבים,

פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות – (4×25) – 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

2. דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

1. אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

2. התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר

החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפסילת הבחינה או לפגיעה בציון.

3. כטיוטה יש להשתמש רק במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.

שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

/המשך מעבר לדף/

ה ש א ל ו ת
פרק שלישי – הנדסה אנליטית, הנדסת המרחב,
וקטורים, מספרים מרוכבים, פונקציות
מעריכיות ולוגריתמיות (100 נקודות)

פתור ארבע מהשאלות 10-17, מהן לפחות אחת מהשאלות 16-17 (לכל שאלה – 25 נקודות).

הנדסה אנליטית, הנדסת המרחב

10. א. נתון הישר: $x + 3y - 5 = 0$.

ישר כלשהו l עובר דרך הנקודה $A(4, 7)$ וחותך את הישר הנתון בנקודה E .

M היא נקודה על הישר l , כך ש- E אמצע הקטע AM .

מצא את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות M הנוצרות באופן זה.

ב. במשולש ABC נתון: $A(4, 7)$,

משוואת הישר המחבר את אמצעי הצלעות AB ו- AC היא $x + 3y - 5 = 0$,

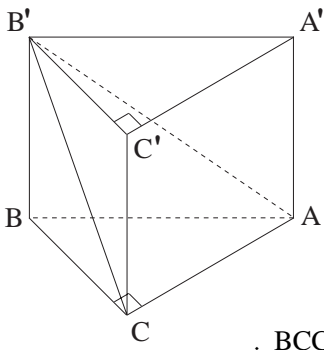
ומשוואת הישר המחבר את אמצעי הצלעות AB ו- BC היא $y = 2x + 9$.

מצא את השיעורים של אמצע הצלע BC . היעזר בסעיף א או פתור בדרך אחרת.

11. נתונה הפרבולה: $y^2 = 16x$.

מהנקודה $A(-4, 6)$ מעבירים שני ישרים המשיקים לפרבולה בנקודות B ו- C .

הוכח כי $\angle BAC = 90^\circ$.



12. נתונה מנסרה ישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה משולש ישר-זווית ($\angle BCA = 90^\circ$) (ראה ציור).

נתון: הזווית בין האלכסון $B'A$ לאלכסון $B'C$

היא β ,

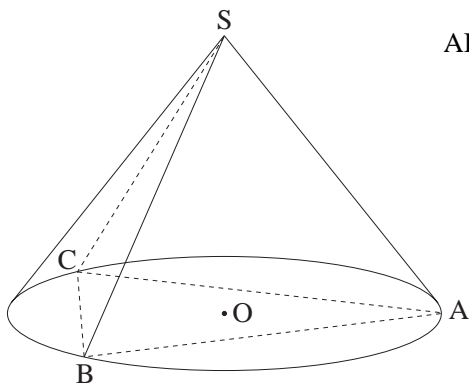
$\angle BAC = \alpha$, $CA = a$.

א. הראה כי המקצוע AC מאונך למישור הפאה $BCC'B'$.

ב. הבע באמצעות α , β ו- a את גובה המנסרה.

ג. הזווית שבין מישור המשולש $AB'C$ לבין מישור הבסיס היא γ .

הראה כי $\cos \gamma = \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta$.



13. נתון חרוט ישר שקדקודו S ומרכזו בסיסו O .

בבסיס החרוט חסום משולש שווה-שוקיים ABC

($AB = AC$), כמתואר בציור.

נתון: רדיוס הבסיס הוא 6 ס"מ,

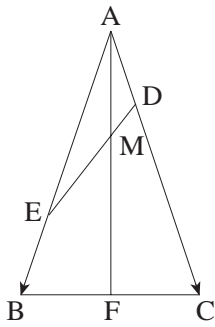
הזווית שבין המישור SBC

לבסיס היא β , $\angle CAB = \alpha$.

הבע באמצעות α ו- β את נפח החרוט.

נקטורים

14. במשולש ABC:



E היא נקודה על הצלע AB,

D היא נקודה על הצלע AC,

התיכון AF לצלע BC חותך את הקטע ED בנקודה M (ראה ציור).

נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$ $\vec{AC} = \underline{v}$

נתון: $\vec{AE} = \frac{2}{3} \underline{u}$ $\vec{AD} = \frac{1}{3} \underline{v}$ $\vec{EM} = 2\vec{MD}$

א. הבע את \vec{MF} באמצעות \underline{u} ו- \underline{v} .

ב. מצא באיזה יחס הנקודה M מחלקת את התיכון AF.

15. נתון המישור: $t(5, 0, -1) + s(1, -2, -1)$

א. הראה כי המישור, הנקבע על-ידי הנקודות $A(0, 0, 0)$, $B(5, 0, -1)$, $C(2, 1, 0)$, מתלכד עם המישור הנתון.

ב. נתונה הנקודה: $B'(6, m, n)$.

מצא לאילו ערכים של m ו- n , $\vec{BB'}$ מאונך למישור ABC.

ג. עבור הערכים m ו- n שמצאת בסעיף ב, חשב את שטח המשולש CBB' .

שם לב: עליך לענות לפחות על אחת מהשאלות 16-17.

מספרים מרוכבים, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

16. נתונה סדרה חשבונית שהאיבר הראשון שלה הוא $k - 7i$ (k הוא מספר ממשי).

הפרש הסדרה הוא $-1 + 2i$.

סכום n האיברים הראשונים בסדרה הוא $-5 + 20i$.

א. מצא את הערך של k .

ב. האם בסדרה הנתונה יש איבר שהוא מספר ממשי? אם כן – מצא את האיבר.

אם לא – הסבר מדוע.

17. נתונה הפונקציה: $f(x) = (\ln x)^{m+1} - (\ln x)^m$ (הפרמטר m הוא מספר טבעי

גדול מ-1).

א. מצא את משוואות הישרים המשיקים לפונקציה בנקודות החיתוך שלה

עם ציר ה- x .

ב. מצא את נקודות החיתוך בין הפונקציה שמתקבלת עבור $m = 2$ לבין הפונקציה

שמתקבלת עבור $m = 4$.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

נוסחאון מתמטיקה

5-4 יחידות לימוד (וחל מקיץ תש"ן)

אלגברה

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$$

פירוק לגורמים

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k + \dots + b^n$$

בינום ניוטון

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

נוסחאות וייטה

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(x_1, x_2 שורשי משוואה ריבועית.)

סדרות

| סדרה הנדסית | סדרה חשבונית | |
|------------------------------------|-------------------------------------|---------------|
| $a_n = a_1 q^{n-1}$ | $a_n = a_1 + (n-1)d$ | האיבר ה-n י : |
| $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ | $S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$ | הסכום: |

$$z = a + bi = r(\cos\theta + i \sin\theta)$$

מספרים מרוכבים

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

מכפלה בהצגה קוטבית:

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

משפט דה-מואבר:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) \right] \quad \text{הם } z^n = r(\cos\alpha + i \sin\alpha)$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1$$

קומבינטוריקה

$$P_n = n!$$

מספר התמורות של n עצמים (בלי חזרות):

מספר התמורות של n עצמים כשמתוכם יש n_1, n_2, \dots, n_k עצמים שווים ביניהם:

$$P_n = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

מספר החליפות של k מתוך n עצמים (בלי חזרות):

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

מספר הצירופים של k מתוך n עצמים (בלי חזרות):

וקטורים

מישור דרך קצות הווקטורים $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$, $\vec{c} = \vec{OC}$: $\vec{x} = t(\vec{b} - \vec{a}) + s(\vec{c} - \vec{a})$

מכפלה סקלרית: $(x, y) = \vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos\alpha$

ניצבות: $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$

אורך של וקטור : $|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

מרחק בין $z = (z_1, z_2, z_3)$ למישור $\vec{a} \cdot \vec{x} + c = 0$: $\frac{|\vec{a} \cdot \vec{z} + c|}{|\vec{a}|}$

זווית בין הישר $t\vec{b} + \vec{d}$ למישור $\vec{a} \cdot \vec{x} + c = 0$: $\sin\beta = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

זווית בין המישורים $\vec{a} \cdot \vec{x} + c = 0$, $\vec{b} \cdot \vec{x} + d = 0$: $\cos\alpha = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

$a^{\log_a x} = \log_a(a^x) = x$

$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

חזקות ולוגריתמים

טריגונומטריה

זהויות

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$

$\text{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\text{tg}\alpha \pm \text{tg}\beta}{1 \mp \text{tg}\alpha \text{tg}\beta}$

$\text{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$

$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$

$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$

משפט הקוסינוס: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$
שטח גזרה: $\frac{1}{2}r^2\alpha$

משפט הסינוס: $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$
אורך קשת של α רדיאנים: $r\alpha$

הנדסת המרחב

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$ נפח כדור:

$V = \frac{B \cdot h}{3}$ נפח חרוט ופירמידה (B - שטח הבסיס):

$P = 4\pi R^2$ שטח פנים של כדור:

$M = \pi R l$ שטח מעטפת חרוט:

אנליזה (חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי)

נגזרות

$(uv)' = u'v + uv'$

$(x^n)' = nx^{n-1}$

$\sin'x = \cos x$

$\text{arc sin}'x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - v'u}{v^2}$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$\cos'x = -\sin x$

$\text{arc cos}'x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\log_a'x = \frac{1}{x \ln a}$

$\text{tg}'x = \frac{1}{\cos^2x}$

$\text{arc tg}'x = \frac{1}{1+x^2}$

$f'(x) = v'(u) \cdot u'(x)$ כלל השרשרת:

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C \quad \text{אינטגרלים}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} [f(a) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(b)] \quad \text{כלל הטרפז:}$$

פונקציות

פונקציה זוגית: $f(x) = f(-x)$ פונקציה אי-זוגית: $f(-x) = -f(x)$

נקודת פיתול: נקודת מעבר בין קמירות לקעירות פונקציה קמורה: \cup

סטטיסטיקה והסתברות

$$S = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 f_1 + (x_2 - \bar{x})^2 f_2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 f_n}{N}} \quad \text{סטיית תקן:}$$

f_1, f_2, \dots, f_n השכיחויות של x_1, x_2, \dots, x_n ;

\bar{x} ממוצע הנתונים ; $f_1 + f_2 + \dots + f_n = N$

נוסחת ברנולי: ההסתברות ל־ k הצלחות ב־ n נסיונות בהתפלגות בינומית עם הסתברות p :

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

לוח של התפלגות נורמלית (0,1) מצטברת

| u | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-----|--------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 0.0 | 0.500 | 504 | 508 | 512 | 516 | 520 | 524 | 528 | 532 | 536 |
| 0.1 | 0.540 | 544 | 548 | 552 | 556 | 560 | 564 | 568 | 571 | 575 |
| 0.2 | 0.579 | 583 | 587 | 591 | 595 | 599 | 603 | 606 | 610 | 614 |
| 0.3 | 0.618 | 622 | 625 | 629 | 633 | 637 | 641 | 644 | 648 | 652 |
| 0.4 | 0.655 | 659 | 663 | 666 | 670 | 674 | 677 | 681 | 684 | 688 |
| 0.5 | 0.692 | 695 | 699 | 702 | 705 | 709 | 712 | 716 | 719 | 722 |
| 0.6 | 0.726 | 729 | 732 | 736 | 739 | 742 | 745 | 749 | 752 | 755 |
| 0.7 | 0.758 | 761 | 764 | 767 | 770 | 773 | 776 | 779 | 782 | 787 |
| 0.8 | 0.788 | 791 | 794 | 797 | 800 | 802 | 805 | 809 | 811 | 813 |
| 0.9 | 0.816 | 819 | 821 | 824 | 826 | 829 | 832 | 834 | 837 | 839 |
| 1.0 | 0.841 | 844 | 846 | 848 | 851 | 853 | 855 | 858 | 860 | 862 |
| 1.1 | 0.864 | 866 | 869 | 871 | 873 | 875 | 877 | 879 | 881 | 883 |
| 1.2 | 0.885 | 887 | 889 | 891 | 893 | 894 | 896 | 898 | 900 | 902 |
| 1.3 | 0.903 | 905 | 907 | 908 | 910 | 911 | 913 | 915 | 916 | 918 |
| 1.4 | 0.919 | 921 | 922 | 924 | 925 | 926 | 928 | 929 | 931 | 932 |
| 1.5 | 0.933 | 935 | 936 | 937 | 938 | 939 | 941 | 942 | 943 | 944 |
| 1.6 | 0.945 | 946 | 947 | 948 | 9495 | 9505 | 9515 | 9525 | 9535 | 9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 9564 | 9573 | 9582 | 9591 | 9599 | 9608 | 9616 | 9625 | 9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 9650 | 9656 | 9664 | 9671 | 9678 | 9686 | 9693 | 9699 | 9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 9719 | 9726 | 9732 | 9738 | 9744 | 9750 | 9756 | 9762 | 9767 |
| 2.0 | 0.9773 | 9778 | 9783 | 9788 | 9793 | 9798 | 9803 | 9808 | 9812 | 9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 9826 | 9830 | 9834 | 9838 | 9842 | 9846 | 9850 | 9854 | 9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 9865 | 9868 | 9871 | 9875 | 9878 | 9881 | 9884 | 9887 | 9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 9896 | 9898 | 9901 | 9904 | 9906 | 9909 | 9911 | 9913 | 9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 9920 | 9922 | 9925 | 9927 | 9929 | 9931 | 9932 | 9934 | 9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 9940 | 9941 | 9943 | 9945 | 9946 | 9948 | 9949 | 9951 | 9952 |
| 2.6 | 0.9954 | 9955 | 9956 | 9957 | 9959 | 9960 | 9961 | 9962 | 9963 | 9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 9966 | 9967 | 9968 | 9969 | 9970 | 9971 | 9972 | 9973 | 9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 9975 | 9976 | 9977 | 9977 | 9978 | 9979 | 9979 | 9980 | 9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 9982 | 9983 | 9983 | 9984 | 9984 | 9985 | 9985 | 9986 | 9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 9987 | 9987 | 9988 | 9988 | 9989 | 9989 | 9989 | 9990 | 9990 |

חנדסה אנליטית

קו ישר

$y - y_1 = m(x - x_1)$: משוואת ישר דרך (x_1, y_1) ששיפועו m

$\text{tg} \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$: נוסחה לזווית α שבין הישרים $y = m_2 x + n_2$, $y = m_1 x + n_1$

$m_1 \cdot m_2 = -1$: ניצבות הישרים $y = m_2 x + n_2$, $y = m_1 x + n_1$

$d = \pm \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$: מרחק הנקודה $(x_0; y_0)$ מהישר $Ax + By + C = 0$

$\left(\frac{\ell x_1 + kx_2}{k + \ell}, \frac{\ell y_1 + ky_2}{k + \ell} \right)$: נקודה המחלקת את הקטע AB ביחס $k : \ell$ $(A(x_1, y_1); B(x_2, y_2))$

מעגל

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$: משוואת המשיק למעגל בנקודה $(x_0; y_0)$

$(x_0 - a) \cdot (x - a) + (y_0 - b) \cdot (y - b) = R^2$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$: **היפרבולה**

$y = \pm \frac{b}{a}x$

האסימפטוטות:

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

מרחק המוקד מהראשית:

$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$

משיק להיפרבולה בנקודה $(x_0; y_0)$:

$n^2 = m^2 a^2 - b^2$

התנאי שהישר $y = mx + n$ ישיק להיפרבולה:

$y^2 = 2px$: **פרבולה**

$yy_0 = p(x + x_0)$

משיק לפרבולה בנקודה $(x_0; y_0)$:

$n = \frac{p}{2m}$

התנאי שהישר $y = mx + n$ ישיק לפרבולה: