

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי-ספר על-יסודיים
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים
מועד הבחינה: קיץ תשס"ב, 2002
מספר השאלון: 186, 171, 035302
נספח: דפי נוסחאות ל-4 ול-5 יחידות לימוד

מתמטיקה

3 יחידות לימוד מתוך 4 יחידות לימוד

הוראות לנבחן

- א. משך הבחינה: שלוש שעות.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים.
פרק ראשון – הנדסת המישור, אלגברה – $(16 \frac{2}{3} \times 3)$ – 50 נקודות
פרק שני – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי, טריגונומטריה, הסתברות
וסטטיסטיקה – $(16 \frac{2}{3} \times 3)$ – 50 נקודות
סה"כ – 100 נקודות
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות:
1. אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
2. התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפסילת הבחינה או לפגיעה בציון.
3. טיוטה יש לרשום רק במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

ה ש א ל ו ת

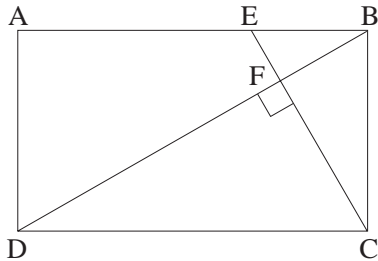
פרק ראשון – הנדסת המישור, אלגברה (50 נקודות)

פתור שלוש מהשאלות 1-4 (לכל שאלה – $16\frac{2}{3}$ נקודות).

הנדסת המישור

1. במלבן ABCD הקטע CE מאונך לאלכסון DB,

F היא נקודת הפגישה של DB עם CE (ראה ציור).



א. הוכח: $BC^2 = DC \cdot BE$.

ב. נתון: $BE = 9$ ס"מ

$BC = 12$ ס"מ

חשב את DB.

אלגברה

2. במקבילית ABCD הצלע AB מונחת על הישר $y = x - 6$,

והאלכסון BD מונח על הישר $y = 3x - 4$.

שיעורי קדקוד C הם $(-3, -3)$.

חשב את שיעורי הקדקודים B ו- D.

3. א. הוכח באינדוקציה, או בדרך אחרת, כי עבור כל n טבעי מתקיים:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

ב. חשב את הסכום: $21 \cdot 22 + 22 \cdot 23 + \dots + 40 \cdot 41$

4. בסדרה יש ארבעה איברים: $a_1, 5, a_3, a_4$.
- שלושת האיברים האחרונים הם שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית.
- סכום האיבר הראשון והרביעי הוא 20.
- סכום האיבר הראשון והשלישי הוא 10.
- מצא את האיברים a_1, a_3, a_4 (מצא את שתי האפשרויות).

פרק שני – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי, טריגונומטריה,

הסתברות וסטטיסטיקה (50 נקודות)

פתור שלוש מהשאלות 5-10 (לכל שאלה – $16\frac{2}{3}$ נקודות).

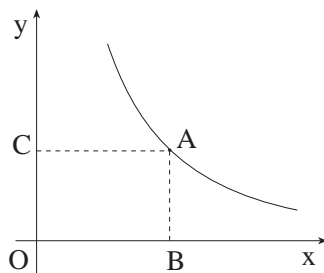
חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי, טריגונומטריה

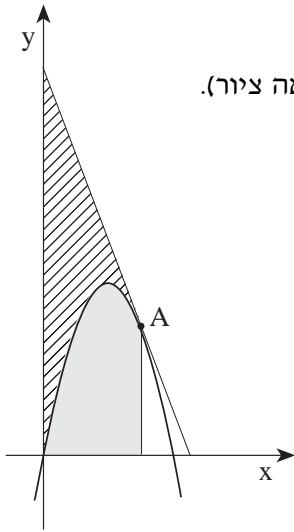
5. נתונה הפונקציה: $f(x) = x^2 \sqrt{10 - 2x}$.

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
- ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

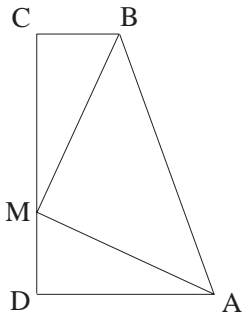
6. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x+3}{x-1}, x > 1$.

מנקודה A שעל גרף הפונקציה הורידו אנכים לציר ה- x ולציר ה- y , ונוצר מלבן ABOC, כמתואר בציור. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי שהיקף המלבן יהיה מינימלי?





7. נתונה הפונקציה: $f(x) = ax - x^2$, $a > 0$.
 מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודה A שבה $x = 6$ (ראה ציור).
 שיפוע המשיק הוא -4 .
 א. חשב את a .
 ב. מנקודה A הורידו אנך לציר ה- x .
 האנך, המשיק, ציר ה- x וציר ה- y יוצרים טרפז.
 הראה שגרף הפונקציה $f(x)$ מחלק את שטח הטרפז
 לשני שטחים שווים (השטח המקווקו והשטח האפור
 בציור).



8. ABCD הוא טרפז ישר-זווית ($\sphericalangle C = \sphericalangle D = 90^\circ$) .
 נקודה M נמצאת על הצלע DC (ראה ציור).
 נתון: $\sphericalangle AMB = 90^\circ$
 $AM = MB = k$
 $\sphericalangle MAD = \alpha$
 הבע באמצעות k ו- α את שטח הטרפז.

הסתברות וסטטיסטיקה

9. הציונים של קבוצת תלמידים במבחן מסוים מתפלגים נורמלית.

הציון הממוצע הוא 71, וסטיית התקן היא 15.

387 תלמידים קיבלו ציון בין 62 ל- 92.

א. כמה תלמידים ניגשו למבחן?

ב. בוחרים באקראי תלמיד אחד. מהי ההסתברות שהתלמיד קיבל ציון גבוה מ- 92 ?

ג. בוחרים באקראי שני תלמידים.

מהי ההסתברות שבדיוק אחד מהם קיבל ציון גבוה מ- 92 ?

10. בקופסה 10 כדורים, חלקם שחורים והשאר לבנים.

מוציאים באקראי כדור אחד. אם הכדור לבן, משאירים אותו מחוץ לקופסה.

אם הוא שחור, מחזירים אותו לקופסה. לאחר מכן מוציאים באקראי כדור שני.

א. כמה כדורים שחורים וכמה כדורים לבנים היו בקופסה בתחילה,

אם ההסתברות ששני הכדורים שמוציאים הם לבנים היא $\frac{1}{3}$?

ב. מהי ההסתברות שמבין שני הכדורים שמוציאים לפחות כדור אחד הוא לבן?

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

נוסחאון מתמטיקה

5-4 יחידות לימוד (החל מקיץ תש"ן)

אלגברה

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$$

פירוק לגורמים

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k + \dots + b^n$$

בינום ניוטון

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

נוסחאות וייטה

$$(x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a})$$

x_1, x_2 שורשי משוואה ריבועית.

סדרות

סדרה הנדסית	סדרה חשבונית	
$a_n = a_1 q^{n-1}$	$a_n = a_1 + (n-1)d$	האיבר ה-n י :
$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$	$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$	הסכום:

$$z = a + bi = r(\cos\theta + i \sin\theta)$$

מספרים מרוכבים

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

מכפלה בהצגה קוטבית:

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

משפט דה-מואבר:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) \right] \quad \text{הם: } z^n = r(\cos\alpha + i \sin\alpha)$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1$$

קומבינטוריקה

$$P_n = n!$$

מספר התמורות של n עצמים (בלי חזרות):

מספר התמורות של n עצמים כשמתוכם יש n_1, n_2, \dots, n_k עצמים שווים ביניהם:

$$P_n = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

מספר החליפות של k מתוך n עצמים (בלי חזרות):

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

מספר הצירופים של k מתוך n עצמים (בלי חזרות):

וקטורים

מישור דרך קצות הווקטורים $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$, $\vec{c} = \vec{OC}$: $\vec{x} = a + t(b-a) + s(c-a)$
 מכפלה סקלרית: $(x, y) = x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = |x| \cdot |y| \cdot \cos \alpha$
 ניצבות: $x \cdot y = 0$
 אורך של וקטור: $|x| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

מרחק בין $z = (z_1, z_2, z_3)$ למישור $a \cdot x + c = 0$: $\frac{|a \cdot z + c|}{|a|}$

זווית בין הישר $t b + d$ למישור $a \cdot x + c = 0$: $\sin \beta = \frac{|a \cdot b|}{|a| \cdot |b|}$

זווית בין המישורים $a \cdot x + c = 0$, $b \cdot x + d = 0$: $\cos \alpha = \frac{|a \cdot b|}{|a| \cdot |b|}$

חוקות ולוגריתמים
 $a^{\log_a x} = \log_a(a^x) = x$ $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

טריגונומטריה

זהויות

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$

$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$

$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$

$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$

$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$

$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$

$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$

משפט הקוסינוס: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$
שטח גזרה: $\frac{1}{2} r^2 \alpha$

משפט הסינוס: $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$
אורך קשת של α רדיאנים: $r \alpha$

חנדסת המרחב

נפח כדור: $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ נפח חרוט ופירמידה (B - שטח הבסיס): $V = \frac{B \cdot h}{3}$

שטח פנים של כדור: $P = 4\pi R^2$ שטח מעטפת חרוט: $M = \pi R l$

אנליזה (חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי)

נגזרות

$(uv)' = u'v + uv'$

$(x^n)' = nx^{n-1}$

$\sin' x = \cos x$

$\operatorname{arc} \sin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - v'u}{v^2}$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$\cos' x = -\sin x$

$\operatorname{arc} \cos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\log_a' x = \frac{1}{x \ln a}$

$\operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$\operatorname{arc} \operatorname{tg}' x = \frac{1}{1+x^2}$

$f'(x) = v'(u) \cdot u'(x)$ כלל השרשרת:

חנדסה אנליטית

קו ישר

$y - y_1 = m(x - x_1)$ משוואת ישר דרך (x_1, y_1) ששיפועו m

$\text{tg} \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$ נוסחה לזווית α שבין הישרים $y = m_2 x + n_2$, $y = m_1 x + n_1$

$m_1 \cdot m_2 = -1$ ניצבות הישרים $y = m_2 x + n_2$, $y = m_1 x + n_1$

$d = \pm \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ מרחק הנקודה $(x_0; y_0)$ מהישר $Ax + By + C = 0$

$\left(\frac{\ell x_1 + kx_2}{k + \ell}, \frac{\ell y_1 + ky_2}{k + \ell} \right)$ נקודה המחלקת את הקטע AB ביחס $k : \ell$ $(A(x_1, y_1); B(x_2, y_2))$

מעגל

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ משוואת המשיק למעגל בנקודה $(x_0; y_0)$

$(x_0 - a) \cdot (x - a) + (y_0 - b) \cdot (y - b) = R^2$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ **היפרבולה**

$y = \pm \frac{b}{a}x$

האסימפטוטות:

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

מרחק המוקד מהראשית:

$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$

משיק להיפרבולה בנקודה $(x_0; y_0)$:

$n^2 = m^2 a^2 - b^2$

התנאי שהישר $y = mx + n$ ישיק להיפרבולה:

$y^2 = 2px$ **פרבולה**

$yy_0 = p(x + x_0)$

משיק לפרבולה בנקודה $(x_0; y_0)$:

$n = \frac{p}{2m}$

התנאי שהישר $y = mx + n$ ישיק לפרבולה: