

סוג הבחינה: בגרות לבתי-ספר על-יסודיים
מועד הבחינה: חורף תשס"ב, 2002
מספר השאלון: 035203
נספח: דפי נוסחאות ל-4 ול-5 יחידות לימוד

מתמטיקה

2 יחידות לימוד
השלמה ל-5 יחידות לימוד
(תכנית חדשה)

הוראות לנבחן

- א. משך הבחינה: שעתיים.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה פרק אחד.
פרק שלישי – טריגונומטריה במרחב, בעיות קיצון
גאומטריות במרחב, הנדסה אנליטית,
וקטורים, מספרים מרוכבים,
פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות – (4x25) – 100 נקודות
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות:
1. אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
2. התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפסילת הבחינה או לפגיעה בציון.
3. כטייטה יש להשתמש רק במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטייטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

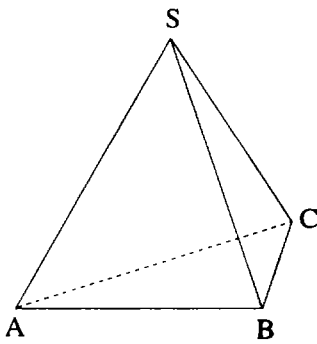
בהצלחה!

ה ש א ל ו ת

פרק שלישי – טריגונומטריה במרחב, בעיות קיצון
גאומטריות במרחב, הנדסה אנליטית, וקטורים, מספרים מרוכבים,
פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות (100 נקודות)

פתור ארבע מהשאלות 10-15 (לכל שאלה – 25 נקודות).

טריגונומטריה במרחב, בעיות קיצון גאומטריות במרחב, הנדסה אנליטית



10. $SABC$ היא פירמידה ישרה שבסיסה הוא משולש שווה-שוקיים (ראה ציור), שבו $\angle CAB = \alpha$, $AB = AC = a$. הזווית שבין מקצוע צדדי של הפירמידה לבין בסיס הפירמידה היא β . הבע את נפח הפירמידה באמצעות a , α , β .

11. נתון המעגל: $x^2 + y^2 = R^2$. מנקודה P שנמצאת מחוץ למעגל מעבירים ישר המשיק למעגל בנקודה A . הראה כי המקום הגאומטרי של נקודות P , שמרחקן מציר ה- y שווה ל- $2PA$, הוא אליפסה.

וקטורים

12. בתיבה $ABCD A' B' C' D'$ נתונים הקדקודים:

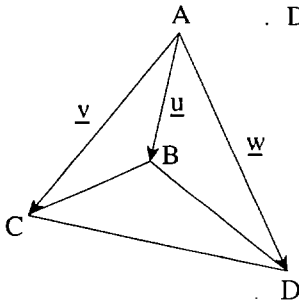
$$A(6, -2, 5) \quad B(3, 1, -1) \quad C(0, 2, 1) \quad C'(2, 6, 2)$$

הנקודה M מחלקת את המקצוע AB כך ש- $\vec{BM} = 2\vec{MA}$.

א. מצא את אורכי הווקטורים \vec{MC} ו- \vec{MA}' .

ב. חשב את שטח המשולש $A'MC$.

13. בטראדר ABCD (ראה ציור) נתון: $AB = AC = BC = 1$



$DA = DB = DC = 2$

א. חשב את $\cos \angle DAC$ ואת $\cos \angle DAB$.

נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$, $\vec{AD} = \underline{w}$

ב. M היא נקודה על הישר AD כך ש- $\vec{AM} = t\vec{AD}$.

ה. הבע את $\cos \angle BMC$ באמצעות t.

ג. מצא את הערכים של t שעבורם $\angle BMC = 60^\circ$.

מספרים מרוכבים

14. נתון מספר מרוכב: $z = x + iy$, $x \neq 0$, $y \neq 0$.

א. הוכח כי אם $z + \frac{1}{z}$ הוא מספר ממשי, אזי z נמצא על מעגל היחידה (רדיוס המעגל, r, הוא יחידה אחת).

ב. הוכח כי אם z נמצא על מעגל היחידה, אזי $z + \frac{1}{z}$ הוא מספר ממשי.

פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

15. נתונה הפונקציה: $f(x) = e^x - 1$.

א. הוכח כי הפונקציה עולה לכל x.

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 0$.

ג. מצא את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה, על-ידי המשיק שמצאת בסעיף ב.

ועל-ידי הישר $y = e - 1$.

בהצלחה!

נוסחאון מתמטיקה

5-4 יחידות לימוד (החל מקיץ תש"ן)

אלגברה

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$$

פירוק לגורמים

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k + \dots + b^n$$

בינום ניוטון

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

נוסחאות וייטה

$$(x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a})$$

x_1, x_2 שורשי משוואה ריבועית.

סדרות

| סדרה הנדסית | סדרה חשבונית | |
|------------------------------------|-------------------------------------|---------------|
| $a_n = a_1 q^{n-1}$ | $a_n = a_1 + (n-1)d$ | האיבר ה-n י : |
| $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ | $S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$ | הסכום: |

$$z = a + bi = r(\cos\theta + i \sin\theta)$$

מספרים מרוכבים

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

מכפלה בהצגה קוטבית:

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

משפט דה-מואבר:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) \right] \quad \text{שורשי המשוואה } z^n = r(\cos\alpha + i \sin\alpha) \text{ הם:}$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1$$

קומבינטוריקה

$$P_n = n!$$

מספר התמורות של n עצמים (בלי חזרות):

מספר התמורות של n עצמים כשמתוכם יש n_1, n_2, \dots, n_k עצמים שווים ביניהם:

$$P_n = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

מספר החליפות של k מתוך n עצמים (בלי חזרות):

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

מספר הצירופים של k מתוך n עצמים (בלי חזרות):

וקטורים

מישור דרך קצות הווקטורים $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$, $\vec{c} = \vec{OC}$: $\vec{x} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) + s(\vec{c} - \vec{a})$

מכפלה סקלרית: $(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos\alpha$

ניצבות: $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$

אורך של וקטור : $|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

מרחק בין $z = (z_1, z_2, z_3)$ למישור $\vec{a} \cdot \vec{x} + c = 0$: $\frac{|\vec{a} \cdot \vec{z} + c|}{|\vec{a}|}$

זווית בין הישר $t\vec{b} + d$ למישור $\vec{a} \cdot \vec{x} + c = 0$: $\sin\beta = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

זווית בין המישורים $\vec{a} \cdot \vec{x} + c = 0$, $\vec{b} \cdot \vec{x} + d = 0$: $\cos\alpha = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

חוקות ולוגריתמים : $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$, ${}_a \log_a x = \log_a(a^x) = x$

טריגונומטריה

זהויות

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$

$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$

$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$

$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$

$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$

משפט הקוסינוס : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$
שטח גורת : $\frac{1}{2}r^2\alpha$

משפט הסינוס : $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$

אורך קשת של α רדיאנים : $r\alpha$

הנדסת המרחב

נפח כדור : $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

נפח חרוט ופירמידה (B - שטח הבסיס) : $V = \frac{B \cdot h}{3}$

שטח פנים של כדור : $P = 4\pi R^2$

שטח מעטפת החרוט : $M = \pi R \ell$

אנליזה (חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי)

נגזרות

$(uv)' = u'v + uv'$

$(x^n)' = nx^{n-1}$

$\sin'x = \cos x$

$\operatorname{arc} \sin'x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - v'u}{v^2}$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$\cos'x = -\sin x$

$\operatorname{arc} \cos'x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\log_a'x = \frac{1}{x \ln a}$

$\operatorname{tg}'x = \frac{1}{\cos^2x}$

$\operatorname{arc} \operatorname{tg}'x = \frac{1}{1+x^2}$

כלל השרשרת : $f'(x) = v'(u) \cdot u'(x)$

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

אינטגרלים

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} [f(a) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(b)]$$

כלל הטרפז:

פונקציות

$f(-x) = -f(x)$: פונקציה אי-זוגית:

$f(x) = f(-x)$

פונקציה זוגית:

U : פונקציה קמורה:

נקודת פיתול: נקודת מעבר בין קמירות לקעירות

סטטיסטיקה והסתברות

$$S = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 f_1 + (x_2 - \bar{x})^2 f_2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 f_n}{N}}$$

סטיית תקן:

x_n, \dots, x_2, x_1 השכיחויות של f_n, \dots, f_2, f_1

$f_1 + f_2 + \dots + f_n = N$; \bar{x} ממוצע הנתונים ;

נוסחת ברנולי: ההסתברות ל' k הצלחות ב' n נסיונות בהתפלגות בינומית עם הסתברות p:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

לוח של התפלגות נורמלית (0,1) מצטברת

| u | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-----|--------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 0.0 | 0.500 | 504 | 508 | 512 | 516 | 520 | 524 | 528 | 532 | 536 |
| 0.1 | 0.540 | 544 | 548 | 552 | 556 | 560 | 564 | 568 | 571 | 575 |
| 0.2 | 0.579 | 583 | 587 | 591 | 595 | 599 | 603 | 606 | 610 | 614 |
| 0.3 | 0.618 | 622 | 625 | 629 | 633 | 637 | 641 | 644 | 648 | 652 |
| 0.4 | 0.655 | 659 | 663 | 666 | 670 | 674 | 677 | 681 | 684 | 688 |
| 0.5 | 0.692 | 695 | 699 | 702 | 705 | 709 | 712 | 716 | 719 | 722 |
| 0.6 | 0.726 | 729 | 732 | 736 | 739 | 742 | 745 | 749 | 752 | 755 |
| 0.7 | 0.758 | 761 | 764 | 767 | 770 | 773 | 776 | 779 | 782 | 787 |
| 0.8 | 0.788 | 791 | 794 | 797 | 800 | 802 | 805 | 809 | 811 | 813 |
| 0.9 | 0.816 | 819 | 821 | 824 | 826 | 829 | 832 | 834 | 837 | 839 |
| 1.0 | 0.841 | 844 | 846 | 848 | 851 | 853 | 855 | 858 | 860 | 862 |
| 1.1 | 0.864 | 866 | 869 | 871 | 873 | 875 | 877 | 879 | 881 | 883 |
| 1.2 | 0.885 | 887 | 889 | 891 | 893 | 894 | 896 | 898 | 900 | 902 |
| 1.3 | 0.903 | 905 | 907 | 908 | 910 | 911 | 913 | 915 | 916 | 918 |
| 1.4 | 0.919 | 921 | 922 | 924 | 925 | 926 | 928 | 929 | 931 | 932 |
| 1.5 | 0.933 | 935 | 936 | 937 | 938 | 939 | 941 | 942 | 943 | 944 |
| 1.6 | 0.945 | 946 | 947 | 948 | 9495 | 9505 | 9515 | 9525 | 9535 | 9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 9564 | 9573 | 9582 | 9591 | 9599 | 9608 | 9616 | 9625 | 9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 9650 | 9656 | 9664 | 9671 | 9678 | 9686 | 9693 | 9699 | 9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 9719 | 9726 | 9732 | 9738 | 9744 | 9750 | 9756 | 9762 | 9767 |
| 2.0 | 0.9773 | 9778 | 9783 | 9788 | 9793 | 9798 | 9803 | 9808 | 9812 | 9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 9826 | 9830 | 9834 | 9838 | 9842 | 9846 | 9850 | 9854 | 9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 9865 | 9868 | 9871 | 9875 | 9878 | 9881 | 9884 | 9887 | 9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 9896 | 9898 | 9901 | 9904 | 9906 | 9909 | 9911 | 9913 | 9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 9920 | 9922 | 9925 | 9927 | 9929 | 9931 | 9932 | 9934 | 9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 9940 | 9941 | 9943 | 9945 | 9946 | 9948 | 9949 | 9951 | 9952 |
| 2.6 | 0.9954 | 9955 | 9956 | 9957 | 9959 | 9960 | 9961 | 9962 | 9963 | 9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 9966 | 9967 | 9968 | 9969 | 9970 | 9971 | 9972 | 9973 | 9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 9975 | 9976 | 9977 | 9977 | 9978 | 9979 | 9979 | 9980 | 9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 9982 | 9983 | 9983 | 9984 | 9984 | 9985 | 9985 | 9986 | 9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 9987 | 9987 | 9988 | 9988 | 9989 | 9989 | 9989 | 9990 | 9990 |

הנדסה אנליטית

קו ישר

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

משוואת ישר דרך (x_1, y_1) ששיפועו m :

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

נוסחה לזווית α שבין הישרים $y = m_2 x + n_2$, $y = m_1 x + n_1$:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

ניצבות הישרים $y = m_2 x + n_2$, $y = m_1 x + n_1$:

$$d = \pm \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

מרחק הנקודה $(x_0; y_0)$ מהישר $Ax + By + C = 0$:

נקודה המחלקת את הקטע AB ביחס $k : \ell$: $(A(x_1, y_1); B(x_2, y_2))$: $\left(\frac{\ell x_1 + k x_2}{k + \ell}, \frac{\ell y_1 + k y_2}{k + \ell} \right)$

מעגל

משוואת המשיק למעגל $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ בנקודה $(x_0; y_0)$:

$$(x_0 - a) \cdot (x - a) + (y_0 - b) \cdot (y - b) = R^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{היפרבולה}$$

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

האסימפטוטות:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

מרחק המוקד מהראשית:

$$\frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} = 1$$

משיק להיפרבולה בנקודה $(x_0; y_0)$:

$$n^2 = m^2 a^2 - b^2$$

התנאי שהישר $y = mx + n$ ישיק להיפרבולה:

$$y^2 = 2px \quad \text{פרבולה}$$

$$y y_0 = p(x + x_0)$$

משיק לפרבולה בנקודה $(x_0; y_0)$:

$$n = \frac{p}{2m}$$

התנאי שהישר $y = mx + n$ ישיק לפרבולה: