

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי-ספר על-יסודיים  
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים  
מועד הבחינה: חורף תשס"ב, 2002  
מספר השאלון: 188, 173, 035303  
נספח: דפי נוסחאות ל-4 ול-5 יחידות לימוד

## מתמטיקה

3 יחידות לימוד מתוך 5 יחידות לימוד

### הוראות לנבחן

- א. משך הבחינה: שלוש שעות.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים.  
פרק ראשון – הנדסת המישור, אלגברה –  $(3 \times \frac{2}{3} \times 16)$  – 50 נקודות  
פרק שני – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי,  
טריגונומטריה –  $(3 \times \frac{2}{3} \times 16)$  – 50 נקודות  
סה"כ – 100 נקודות
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:  
1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.  
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.  
2. דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות:  
1. אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.  
2. התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.  
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.  
חוסר פירוט עלול לגרום לפסילת הבחינה או לפגיעה בציון.  
3. כטיוטה יש להשתמש רק במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.  
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

**בהצלחה!**

## ה ש א ל ו ת

## פרק ראשון – הנדסת המישור, אלגברה (50 נקודות)

פתור שלוש מהשאלות 1-4 (לכל שאלה –  $16\frac{2}{3}$  נקודות).הנדסת המישור

1. א. הוכח את המשפט: שני מיתרים, הנחתכים בתוך מעגל, מחלקים זה את זה, כך שמכפלת קטעי מיתר אחד שווה למכפלת קטעי המיתר האחר.
- ב. במעגל שרדיוסו R, הקוטר AB מאונך למיתר DC. הקוטר והמיתר נחתכים בנקודה E. נתון:  $AE : EB = 1 : 4$ . הבע את שטח המשולש ADC באמצעות R.

אלגברה

2. נתונה סדרה המוגדרת לכל n טבעי:  $a_j = k$
- $$a_{n+1} = 4n - a_n$$
- א. הבע את  $a_{n+2}$  באמצעות  $a_n$ .
- ב. מספר האיברים בסדרה הנתונה הוא  $2m$ .
- הבע באמצעות k ו- m את סכום האיברים העומדים במקומות אי-זוגיים בסדרה הנתונה.
- ג. הראה כי סכום  $2m$  האיברים בסדרה הנתונה אינו תלוי ב- k.

3. הוכח באינדוקציה, או בדרך אחרת, כי עבור כל  $n$  טבעי מתקיים:

$$(2n + 1) + (2n + 3) + (2n + 5) + \dots + (4n - 1) = 3n^2$$

4. נתונות שש ספרות: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

כמה מספרים שונים בני ארבע ספרות אפשר ליצור מהספרות האלה בכל אחד משלושת המקרים א-ג שלפניך?

א. כאשר כל הספרות במספר שונות זו מזו.

ב. כאשר כל הספרות במספר הן זוגיות. כל ספרה זוגית יכולה להופיע מספר פעמים בלי הגבלה.

ג. כאשר המספר גדול מ-4300, וכל הספרות שונות זו מזו.

### פרק שני – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי, טריגונומטריה (50 נקודות)

פתור שלוש מהשאלות 5-9 (לכל שאלה –  $16\frac{2}{3}$  נקודות).

5. נתונה הפונקציה:  $y = \frac{(x + a)^2}{x - a}$ ,  $a > 0$ .

א. הבע באמצעות  $a$ :

(1) את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

(3) אסימפטוטות מקבילות לצירים.

(4) את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

6. בציור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:

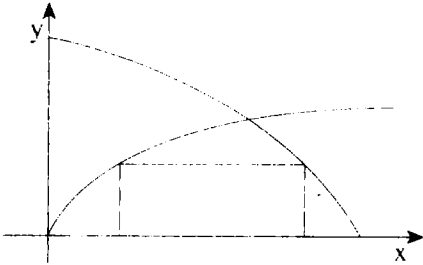
$$g(x) = \sqrt{36 - 4x} \quad , \quad f(x) = \sqrt{2x}$$

מלבן חסום בין הגרפים של הפונקציות

ובין ציר ה- $x$ , כמתואר בציור.

מצא את השטח הגדול ביותר האפשרי

למלבן שחסום באופן זה.



7. נתונות שתי פונקציות בתחום  $0 < x < \pi$ :  $f(x) = a - \cos x$ ,  $g(x) = \sin x$

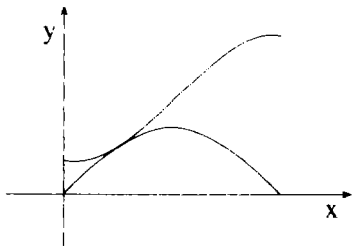
(ראה ציור). לפונקציות יש משיק משותף

בתחום הנתון.

א. מצא את הפרמטר  $a$ .

ב. מצא את השטח הכלוא בין הגרפים של

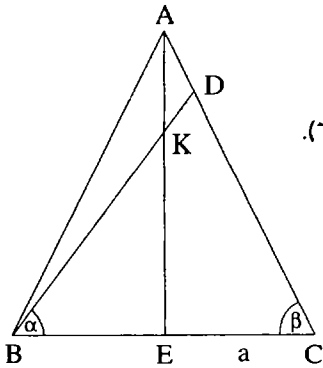
שתי הפונקציות ובין ציר ה- $y$  בתחום הנתון.



8. במשולש שזוויותיו הן  $\alpha$ ,  $\beta$  ו- $\gamma$  מתקיים:  $\cos \alpha + \cos \beta = \sqrt{3}$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 1$$

מצא את זוויות המשולש.



9. במשולש שווה-שוקיים  $ABC$  ( $AB = AC$ )  
 K היא נקודה על הגובה AE, כך ש-  $AK = \frac{1}{3}AE$ .  
 הישר BK חותך את השוק AC בנקודה D (ראה ציור).  
 נתון:  $\angle DBC = \alpha$ ,  $\angle ACB = \beta$ ,  $EC = a$ .

א. מצא את היחס  $\frac{\tan \beta}{\tan \alpha}$ .

ב. מצא את היחס  $\frac{AC}{DC}$ .

### בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל  
 אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

# נוסחאון מתמטיקה

5-4 יחידות לימוד (החל מקיץ תש"ן)

## אלגברה

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$$

פירוק לגורמים

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k + \dots + b^n$$

בינום ניוטון

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

נוסחאות וייטה

$$(x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a})$$

$x_1, x_2$  שורשי משוואה ריבועית.

## סדרות

סדרה הנדסית	סדרה חשבונית	
$a_n = a_1 q^{n-1}$	$a_n = a_1 + (n-1)d$	האיבר ה-n י :
$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$	$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$	הסכום:

$$z = a + bi = r(\cos\theta + i \sin\theta)$$

מספרים מרוכבים

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

מכפלה בהצגה קוטבית:

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

משפט דה-מואבר:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left[ \cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) \right] \quad \text{שורשי המשוואה } z^n = r(\cos\alpha + i \sin\alpha) \text{ הם:}$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1$$

## קומבינטוריקה

$$P_n = n!$$

מספר התמורות של n עצמים (בלי חזרות):

מספר התמורות של n עצמים כשמתוכם יש  $n_1, n_2, \dots, n_k$  עצמים שווים ביניהם:

$$P_n = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

מספר החליפות של k מתוך n עצמים (בלי חזרות):

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

מספר הצירופים של k מתוך n עצמים (בלי חזרות):

וקטורים

מישור דרך קצות הווקטורים  $\vec{a} = \vec{OA}$ ,  $\vec{b} = \vec{OB}$ ,  $\vec{c} = \vec{OC}$  :  $\vec{x} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) + s(\vec{c} - \vec{a})$

מכפלה סקלרית:  $(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos\alpha$

ניצבות:  $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$

אורך של וקטור :  $|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

מרחק בין  $z = (z_1, z_2, z_3)$  למישור  $\vec{a} \cdot \vec{x} + c = 0$  :  $\frac{|\vec{a} \cdot \vec{z} + c|}{|\vec{a}|}$

זווית בין הישר  $t\vec{b} + d$  למישור  $\vec{a} \cdot \vec{x} + c = 0$  :  $\sin\beta = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

זווית בין המישורים  $\vec{a} \cdot \vec{x} + c = 0$ ,  $\vec{b} \cdot \vec{x} + d = 0$  :  $\cos\alpha = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

חוקות ולוגריתמים :  $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$  ,  ${}_a \log_a x = \log_a(a^x) = x$

טריגונומטריה

זהויות

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$  ,  $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$

$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$  ,  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$

$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$  ,  $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$  ,  $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$  ,  $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$

משפט הסינוס:  $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$

משפט הקוסינוס:  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$  , אורך קשת של  $\alpha$  רדיאנים:  $r\alpha$

שטח גורת:  $\frac{1}{2}r^2\alpha$

הנדסת המרחב

נפח כדור:  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$  , נפח חרוט ופירמידה (B - שטח הבסיס):  $V = \frac{B \cdot h}{3}$

שטח פנים של כדור:  $P = 4\pi R^2$  , שטח מעטפת החרוט:  $M = \pi R \ell$

אנליזה (חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי)

נגזרות

$(uv)' = u'v + uv'$  ,  $(x^n)' = nx^{n-1}$  ,  $\sin'x = \cos x$  ,  $\arcsin'x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - v'u}{v^2}$  ,  $(a^x)' = a^x \ln a$  ,  $\cos'x = -\sin x$  ,  $\arccos'x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\log_a'x = \frac{1}{x \ln a}$  ,  $\operatorname{tg}'x = \frac{1}{\cos^2x}$  ,  $\arctg'x = \frac{1}{1+x^2}$

כלל השרשרת:  $f'(x) = v'(u) \cdot u'(x)$





הנדסה אנליטית

קו ישר

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

משוואת ישר דרך  $(x_1, y_1)$  ששיפועו  $m$  :

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

נוסחה לזווית  $\alpha$  שבין הישרים  $y = m_2 x + n_2$  ,  $y = m_1 x + n_1$  :

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

ניצבות הישרים  $y = m_2 x + n_2$  ,  $y = m_1 x + n_1$  :

$$d = \pm \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

מרחק הנקודה  $(x_0; y_0)$  מהישר  $Ax + By + C = 0$  :

נקודה המחלקת את הקטע AB ביחס  $k : \ell$  :  $(A(x_1, y_1); B(x_2, y_2))$  :  $\left( \frac{\ell x_1 + kx_2}{k + \ell}, \frac{\ell y_1 + ky_2}{k + \ell} \right)$

מעגל

משוואת המשיק למעגל  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$  בנקודה  $(x_0; y_0)$  :

$$(x_0 - a) \cdot (x - a) + (y_0 - b) \cdot (y - b) = R^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{היפרבולה}$$

$$y = \pm \frac{b}{a}x$$

האסימפטוטות:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

מרחק המוקד מהראשית:

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

משיק להיפרבולה בנקודה  $(x_0; y_0)$  :

$$n^2 = m^2 a^2 - b^2$$

התנאי שהישר  $y = mx + n$  ישיק להיפרבולה:

$$y^2 = 2px \quad \text{פרבולה}$$

$$yy_0 = p(x + x_0)$$

משיק לפרבולה בנקודה  $(x_0; y_0)$  :

$$n = \frac{p}{2m}$$

התנאי שהישר  $y = mx + n$  ישיק לפרבולה: