

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי-ספר על-יסודיים
 ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים
 מועד הבחינה: חורף תשס"ב, 2002
 מספר השאלון: 186, 171, 035302
 נספח: דפי נוסחאות ל-4 ול-5 יחידות לימוד

מתמטיקה

3 יחידות לימוד מתוך 4 יחידות לימוד

הוראות לנבחן

- א. משך הבחינה: שלוש שעות.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים.
 פרק ראשון – הנדסת המישור, אלגברה – $(16\frac{2}{3} \times 3)$ – 50 נקודות
 פרק שני – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי, טריגונומטריה, הסתברות
 וסטטיסטיקה – $(16\frac{2}{3} \times 3)$ – 50 נקודות
 סה"כ – 100 נקודות
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
 1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
 שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
 2. דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות:
 1. אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
 2. התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
 הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
 חוסר פירוט עלול לגרום לפסילת הבחינה או לפגיעה בציון.
 3. טיטה יש לרשום רק במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
 שימוש בטיטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

השאלות

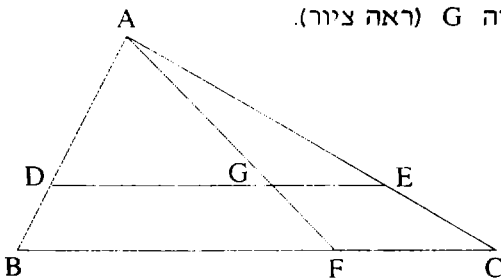
פרק ראשון – הנדסת המישור, אלגברה (50 נקודות)

פתור שלוש מהשאלות 1-4 (לכל שאלה – $16\frac{2}{3}$ נקודות).

הנדסת המישור

1. במשולש ABC הקטע DE מקביל לצלע BC.

הקטע AF חותך את הקטע DE בנקודה G (ראה ציור).



א. הוכח: $BF \cdot GE = DG \cdot FC$

ב. נתון: $DG = 4$ ס"מ

$GE = 2$ ס"מ

$BC = 9$ ס"מ

חשב את היחס בין שטח הטרפז BDGF לבין שטח הטרפז FGEC.

אלגברה

2. נתון מעגל $R^2 = (x - 2)^2 + (y - 3)^2$, שמרכזו בנקודה E.

המעגל עובר דרך ראשית הצירים O, וחותך את ציר ה-y בנקודה נוספת A,

ואת ציר ה-x בנקודה נוספת B.

AOBC הוא מלבן. חשב את שטח המשולש CEB.

3. נתון כי הסדרה $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ היא סדרה חשבונית,

והסדרה $a_3, a_4, 45, \dots$ היא סדרה הנדסית.

מצא את ההפרש של הסדרה החשבונית.

4. א. הוכח באינדוקציה או בדרך אחרת כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$$

ב. חשב את הסכום: $6^3 + 7^3 + \dots + 50^3$

פרק שני – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי, טריגונומטריה,

הסתברות וסטטיסטיקה (50 נקודות)

פתור שלוש מהשאלות 5-10 (לכל שאלה – $16\frac{2}{3}$ נקודות).

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי, טריגונומטריה

5. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{x + ax^2}$.

שיפוע הפונקציה בנקודה $x = \frac{1}{2}$ הוא 0.

א. חשב את a .

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. מצא את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

6. כאשר רכבת נוסעת במהירות של x קמ"ש, העלות (בשקלים)

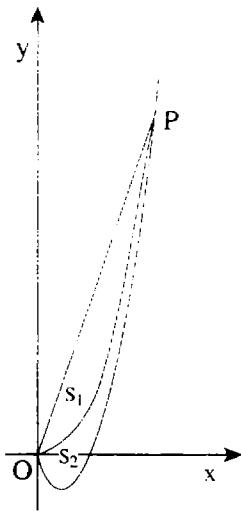
של שעת נסיעה אחת היא: $32 + \frac{x^3}{4000}$

א. הרכבת נסעה 200 ק"מ במהירות של x קמ"ש. בטא באמצעות x כמה זמן

(בשעות) נסעה הרכבת.

ב. מה צריך להיות הערך של המהירות x , כדי שעלות ההפעלה של הרכבת במשך

הזמן שהיא נסעה תהיה מינימלית?



7. נתונים הגרפים של שתי פונקציות: $f(x) = 2x^2 - 3x$

$$g(x) = \frac{1}{3}x^3$$

הגרפים נפגשים בראשית הצירים O ובנקודה P (ראה ציור).

S_1 הוא השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה $g(x)$

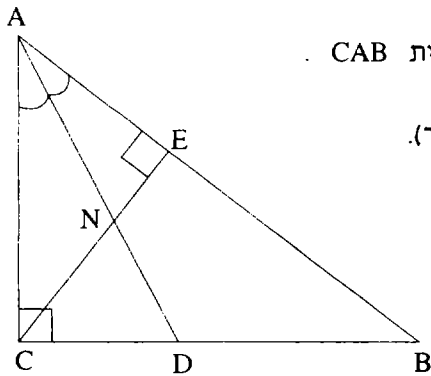
ועל-ידי הישר OP.

S_2 הוא השטח המוגבל על-ידי הגרפים של הפונקציות

$f(x)$ ו- $g(x)$.

חשב את היחס $\frac{S_1}{S_2}$.

8. במשולש ישר-זווית ABC ($\angle C = 90^\circ$)



CE הוא גובה ליתר, ו- AD חוצה את הזווית CAB.

CE ו- AD נחתכים בנקודה N (ראה ציור).

נתון: $AC = 18$ ס"מ,

$\angle CAB = 50^\circ$.

א. מצא את אורך הקטע AE.

ב. מצא את אורך הקטע ND.

הסתברות וסטטיסטיקה

9. הציונים במבחן כניסה לחוג מחשבים מתפלגים נורמלית.
הציון הממוצע במבחן הוא 53 וסטיית התקן היא 11.5 .
מספר הנבחנים במבחן הוא 4500 .
א. כמה נבחנים (בערך) קיבלו ציון גבוה מ- 65 ?
ב. 900 נבחנים עברו בהצלחה את מבחן הכניסה. מה היה ציון המעבר?
(בתשובתך דייק עד ספרה אחת אחרי הנקודה העשרונית).
10. ידוע שאם בוחרים באקראי 3 מכוניות מכלל המכוניות בארץ מסוימת,
ההסתברות שבכל אחת מ- 3 המכוניות יש מזגן היא 0.027 .
בוחרים באקראי 7 מכוניות. מהי ההסתברות שלפחות במכונית אחת יש מזגן?

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

נוסחאון מתמטיקה

5-4 יחידות לימוד (החל מקיץ תש"ן)

אלגברה

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$$

פירוק לגורמים

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k + \dots + b^n$$

בינום ניוטון

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

נוסחאות וייטה

$$(x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a})$$

x_1, x_2 שורשי משוואה ריבועית.

סדרות

סדרה הנדסית	סדרה חשבונית	
$a_n = a_1 q^{n-1}$	$a_n = a_1 + (n-1)d$	האיבר ה-n י :
$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$	$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$	הסכום:

$$z = a + bi = r(\cos\theta + i \sin\theta)$$

מספרים מרוכבים

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

מכפלה בהצגה קוטבית:

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

משפט דה-מואבר:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) \right] \quad \text{שורשי המשוואה } z^n = r(\cos\alpha + i \sin\alpha) \text{ הם:}$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1$$

קומבינטוריקה

$$P_n = n!$$

מספר התמורות של n עצמים (בלי חזרות):

מספר התמורות של n עצמים כשמתוכם יש n_1, n_2, \dots, n_k עצמים שווים ביניהם:

$$P_n = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

מספר החליפות של k מתוך n עצמים (בלי חזרות):

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

מספר הצירופים של k מתוך n עצמים (בלי חזרות):

וקטורים

מישור דרך קצות הווקטורים $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$, $\vec{c} = \vec{OC}$: $\vec{x} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) + s(\vec{c} - \vec{a})$

מכפלה סקלרית: $(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos\alpha$

ניצבות: $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$

אורך של וקטור : $|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

מרחק בין $z = (z_1, z_2, z_3)$ למישור $\vec{a} \cdot \vec{x} + c = 0$: $\frac{|\vec{a} \cdot \vec{z} + c|}{|\vec{a}|}$

זווית בין הישר $t\vec{b} + d$ למישור $\vec{a} \cdot \vec{x} + c = 0$: $\sin\beta = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

זווית בין המישורים $\vec{a} \cdot \vec{x} + c = 0$, $\vec{b} \cdot \vec{x} + d = 0$: $\cos\alpha = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

חוקות ולוגריתמים : $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$, ${}_a \log_a x = \log_a(a^x) = x$

טריגונומטריה

זהויות

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$, $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$

$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$

$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$, $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$, $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$, $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$

משפט הסינוס: $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$

משפט הקוסינוס: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, אורך קשת של α רדיאנים: $r\alpha$

שטח גורת: $\frac{1}{2}r^2\alpha$

הנדסת המרחב

נפח כדור: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, נפח חרוט ופירמידה (B - שטח הבסיס): $V = \frac{B \cdot h}{3}$

שטח פנים של כדור: $P = 4\pi R^2$, שטח מעטפת החרוט: $M = \pi R \ell$

אנליזה (חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי)

נגזרות

$(uv)' = u'v + uv'$, $(x^n)' = nx^{n-1}$, $\sin'x = \cos x$, $\arcsin'x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - v'u}{v^2}$, $(a^x)' = a^x \ln a$, $\cos'x = -\sin x$, $\arccos'x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\log_a'x = \frac{1}{x \ln a}$, $\operatorname{tg}'x = \frac{1}{\cos^2 x}$, $\arctg'x = \frac{1}{1+x^2}$

כלל השרשרת: $f'(x) = v'(u) \cdot u'(x)$

הנדסה אנליטית

קו ישר

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

משוואת ישר דרך (x_1, y_1) ששיפועו m :

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

נוסחה לזווית α שבין הישרים $y = m_2 x + n_2$, $y = m_1 x + n_1$:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

ניצבות הישרים $y = m_2 x + n_2$, $y = m_1 x + n_1$:

$$d = \pm \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

מרחק הנקודה $(x_0; y_0)$ מהישר $Ax + By + C = 0$:

$$\left(\frac{\ell x_1 + k x_2}{k + \ell}, \frac{\ell y_1 + k y_2}{k + \ell} \right) : (A(x_1, y_1); B(x_2, y_2)) \quad k : \ell \text{ ביחס } AB \text{ הקטע את המחלקת}$$

מעגל

משוואת המשיק למעגל $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ בנקודה $(x_0; y_0)$:

$$(x_0 - a) \cdot (x - a) + (y_0 - b) \cdot (y - b) = R^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{היפרבולה}$$

$$y = \pm \frac{b}{a}x$$

האסימפטוטות:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

מרחק המוקד מהראשית:

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

משיק להיפרבולה בנקודה $(x_0; y_0)$:

$$n^2 = m^2 a^2 - b^2$$

התנאי שהישר $y = mx + n$ ישיק להיפרבולה:

$$y^2 = 2px \quad \text{פרבולה}$$

$$yy_0 = p(x + x_0)$$

משיק לפרבולה בנקודה $(x_0; y_0)$:

$$n = \frac{p}{2m}$$

התנאי שהישר $y = mx + n$ ישיק לפרבולה: