

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי ספר על-יסודיים  
ב. בגרות לנבחנים אקסטרנוניים  
מועד הבחינה: חורף תשס"ב, 2002  
מספר השאלה: 186, 035302  
דף נוסחאות ל-4 ול-5 ייחידות לימוד  
נספח:

## מתמטיקה

3 ייחידות לימוד מתון 4 ייחידות לימוד

### הוראות לנבחן

- א. משך הבחינה: שלוש שעות.
- ב. מבנה השאלה ופתח הערכה: בשאלון זה שני פרקים.  
פרק ראשון – הנדסת המישר, אלגברה –  $(16 \times 3) \times 3$  – 50 נקודות  
פרק שני – חשבון דיפרנציאלי וrintegrali, טריגונומטריה, הסתברות –  $(16 \times 3) \times 3$  – 50 נקודות  
וסטטיסטיקה – סה"כ – 100 נקודות
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכונות במחשבון הניתן לתכנות.
  2. דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות:
1. אל תעתק את השאלה; סמן את מספירה בלבד.
  2. התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גפ כאשר החישובים מתבצעים בעוזרת מחשבון.
  3. הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפסילת הבחינה או לפגיעה בזכין.
  4. טיווח יש לרשום רק במחברת הבחינה או בדף שקיבלת מהמשגיחים. שימוש בטיווח אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

הנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכונות לנבחנות לנבחנים אחד.

**בהצלחה!**

## השאלות

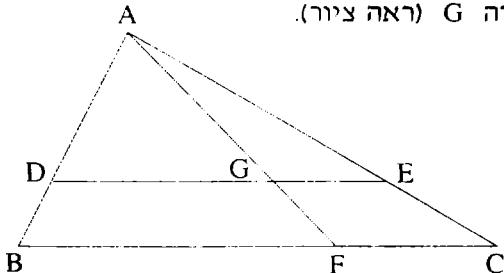
### פרק ראשון – הנדסת המישור, אלגברה (50 נקודות)

פתרונות שלוש מהשאלות 1-4 (לכל שאלה –  $\frac{2}{3}$  נקודות).

#### הנדסת המישור

1. במשולש ABC הקטע DE מקביל לצלע BC.

הקטע AF חותך את הקטע DE בנקודה G (ראה ציור).



א. הוכח:  $BF \cdot GE = DG \cdot FC$

ב. נתון:  $4 \text{ ס"מ} = DG$

$2 \text{ ס"מ} = GE$

$9 \text{ ס"מ} = BC$

. חשב את היחס בין שטח הטרפז BDGF לבין שטח הטרפז FGEC

#### אלגברה

2. נתון מעגל  $R^2 = (y - 3)^2 + (x - 2)^2$ , שמרכזו בנקודה E.

המעגל עובר דרך ראשית הצירים O, וחותך את ציר ה- y בנקודה נוספת נספת A,

ואת ציר ה- x בנקודה נוספת נספת B.

. AOBC הוא מלבן. חשב את שטח המשולש CEB.

3. נתון כי הסדרה  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{15}$  היא סדרה חשבונית,

והסדרה  $a_3, a_4, \dots, a_{15}$  היא סדרה הנדסית.

. מצא את ההפרש של הסדרה החשבונית.

4. א. הוכח באינדוקציה או בדרך אחרת כי לכל  $n$  טבאי מתקיים:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$$

ב. חשב את הסכום:

## פרק שני – חישובו דיפרנציאלי וaintגרלי, טריגונומטריה, הסתברות וסטטיסטיקה (50 נקודות)

פתרונות שלוש מהשאלות 5-10 (לכל שאלה –  $\frac{2}{3}$  נקודות).

### חישובו דיפרנציאלי וaintגרלי, טריגונומטריה

5. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{x + ax^2}$

שיעור הפונקציה בנקודה  $x = 0$  הוא .

א. חשב את  $a$ .

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. מצא את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה.

ד. סרטט סקיצה של גраф הפונקציה.

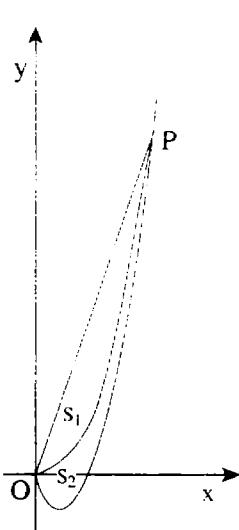
6. כאשר רכבת נוסעת במהירות של  $x$  קמ"ש, העלות (ב שקליםים)

של שעת נסעה אחת היא:  $32 + \frac{x^3}{4000}$

א. הרכבת נסעה 200 ק"מ במהירות של  $x$  קמ"ש. בטא באמצעות  $x$  כמה זמן (בשעות) נסעה הרכבת.

ב. מה צריך להיות הערך של המהירות  $x$ , כדי שעלות הפעלה של הרכבת בזמן

הזמן שהוא נסעה תהיה מינימלית?



7. נתונים הגרפים של שתי פונקציות:  $f(x) = 2x^2 - 3x$

$$g(x) = \frac{1}{3}x^3$$

הגרפים נפגשים בראשית הצירים O ובנקודה P (ראה ציור).

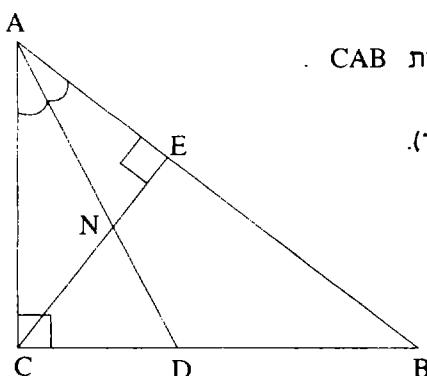
S<sub>1</sub> הוא השטח המוגבל על ידי גוף הפונקציה g(x)

ועל-ידי הישר OP.

S<sub>2</sub> הוא השטח המוגבל על ידי הגוף הגרפי של הפונקציה f(x) ו- g(x).

$$\text{חסוב את היחס } \frac{S_1}{S_2}$$

8. במשולש ישר-זווית ABC ( $\angle C = 90^\circ$ )



CAB הוא גובה ליתר, ו- AD חוצה את הזווית CAB

ו- AD נחתכים בנקודה N (ראה ציור).

נתון: 18 ס"מ = AC ,

$$\angle CAB = 50^\circ$$

א. מצא את אורך הקטע AE .

ב. מצא את אורך הקטע ND .

הסתברות וסטטיסטיקה

9. הציונים ב מבחון כניסה לחוג מחשבים מתפלגים נורמלית.
- הציון הממוצע ב מבחון הוא 53 ו סטיית התקן היא 11.5 .
- מספר הנבחנים ב מבחון הוא 4500 .
- א. כמה נבחנים (בערך) קיבלו ציון גובה מ- 65 ?
- ב. 900 נבחנים עברו בהצלחה את מבחון הכניסה. מה היה ציון המעבר?
- (בתשובתך דיקק עד ספירה אחת אחרי הנקודה העשרונית).
10. ידוע שאם בוחרים באקראי 3 מכוניות מכלל המכוניות בארץ מסויימת, ההסתברות שבכל אחת מ- 3 המכוניות יש מזגן היא 0.027 .
- בוחרים באקראי 7 מכוניות. מהי ההסתברות של לפחות במכונית אחת יש מזגן?

**בְּחִילָח !**

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל  
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך

# נוסחאות מתמטיקת

## 4-5 ייחדות לימוד (חחל מקיז תש"נ)

### אלגברה

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$$

### פירוק לגורמים

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k + \dots + b^n$$

### בינום ניוטון

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

( $x_1, x_2$ ) שורשי המשווה ריבועית.

### נוסחאות ויטיה

### סדרות

| סדרה הנדסית                        | סדרה חשבונית                        |                   |
|------------------------------------|-------------------------------------|-------------------|
| $a_n = a_1 q^{n-1}$                | $a_n = a_1 + (n-1)d$                | האיבר ה- $n$ -י : |
| $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ | $S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$ | הסכום:            |

$$z = a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

### מספרים מרוכבים

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

מכפלת בהצגה קוטבית:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

משפט דה-מואבר:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left[ \cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) \right] \quad z^n = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1$$

### קומבינטוריקה

מספר התמורות של  $n$  עצמים (בלי חזרות):

מספר התמורות של  $n$  עצמים כسمותוכם יש  $n_1, n_2, \dots, n_k$  עצמים שווים ביחידות:

$$p_n = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}$$

מספר החליפות של  $k$  מתוך  $n$  עצמים (בלי חזרות):

מספר הצירופים של  $k$  מתוך  $n$  עצמים (בלי חזרות):

### וקטורים

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + s(\mathbf{c} - \mathbf{a}) & : \mathbf{z} = \overrightarrow{OC}, \mathbf{b} = \overrightarrow{OB}, \mathbf{a} = \overrightarrow{OA} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = |\mathbf{x}| |\mathbf{y}| \cos \alpha & \text{מכפלת סקלרית:} \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= 0 & \text{ניצבות:} \\ |\mathbf{x}| &= \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} & \text{אורך של וקטור:} \end{aligned}$$

$$\frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{z} + c|}{|\mathbf{a}|} \quad \text{מרחק בין } (\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3) \text{ למישור } \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + c = 0$$

$$\sin \beta = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} \quad \text{זווית בין המשר } \mathbf{a} + \mathbf{b} \text{ למישור } \mathbf{a} + \mathbf{c} = 0 \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

$$\cos \alpha = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} \quad \text{זווית בין חמשוריים } 0 \cdot \mathbf{a} + \mathbf{c} = 0 \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$

$$a^{\log_a x} = \log_a(a^x) = x \quad \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad \text{חוקות לוגריתמים}$$

### טריגונומטריה

#### זהויות

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad \text{משפט חקוטינוס:}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R \quad \text{משפט היסינוס:}$$

$$\frac{1}{2} r^2 \alpha \quad \text{שטח גורה:}$$

$$r \alpha \quad \text{אורך קשת של } \alpha \text{ רדייאנים:}$$

### תנדת חמרח

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad \text{נפח כדור:} \quad V = \frac{B \cdot h}{3} \quad \text{נפח חרוט ופירמידה (B - שטח הבסיס):}$$

$$P = 4\pi R^2 \quad \text{שטח פנים של כדור:} \quad M = \pi R^2 \quad \text{שטח מעטפת חרוט:}$$

### אנליזה (חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי)

$$(uv)' = u'v + uv' \quad (x^n)' = nx^{n-1} \quad \sin' x = \cos x \quad \operatorname{arc sin}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - v'u}{v^2} \quad (a^x)' = a^x \ln a \quad \cos' x = -\sin x \quad \operatorname{arc cos}' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x) = v'(u) \cdot u'(x) \quad \log_a' x = \frac{1}{x \ln a} \quad \operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \operatorname{arc tg}' x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{כלל השארשת:}$$

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

אינטגרלים

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} [ f(a) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(b) ]$$

כלל הטרפז:

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{פונקציה איזומית:}$$

$$f(x) = f(-x)$$

פונקציה זוגית:

$$\cup \quad \text{פונקציה קמורה:}$$

נקודות פיתול: נקודות מעבר בין קמירות לקעירות

פונקציות

### סטטיסטיקה וחסתברות

$$S = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 f_1 + (x_2 - \bar{x})^2 f_2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 f_n}{N}}$$

סטיית תקן:

$x_1, x_2, \dots, x_n$  השכיחויות של  $f_n, f_2, f_1$

$$f_1 + f_2 + \dots + f_n = N \quad \bar{x} \text{ ממוצע הנתונים:}$$

נוסחת ברנולי: ההסתברות  $\leq k$  הצלחות  $\geq n$  נסיעות בהסתפלגות ביןומית עם הסתברות  $p$ :

$$p_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

### לוח של התפלגות נורמלית (0,1) מצטברת

| u   | 0      | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    |
|-----|--------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 0.0 | 0.500  | 504  | 508  | 512  | 516  | 520  | 524  | 528  | 532  | 536  |
| 0.1 | 0.540  | 544  | 548  | 552  | 556  | 560  | 564  | 568  | 571  | 575  |
| 0.2 | 0.579  | 583  | 587  | 591  | 595  | 599  | 603  | 606  | 610  | 614  |
| 0.3 | 0.618  | 622  | 625  | 629  | 633  | 637  | 641  | 644  | 648  | 652  |
| 0.4 | 0.655  | 659  | 663  | 666  | 670  | 674  | 677  | 681  | 684  | 688  |
| 0.5 | 0.692  | 695  | 699  | 702  | 705  | 709  | 712  | 716  | 719  | 722  |
| 0.6 | 0.726  | 729  | 732  | 736  | 739  | 742  | 745  | 749  | 752  | 755  |
| 0.7 | 0.758  | 761  | 764  | 767  | 770  | 773  | 776  | 779  | 782  | 787  |
| 0.8 | 0.788  | 791  | 794  | 797  | 800  | 802  | 805  | 809  | 811  | 813  |
| 0.9 | 0.816  | 819  | 821  | 824  | 826  | 829  | 832  | 834  | 837  | 839  |
| 1.0 | 0.841  | 844  | 846  | 848  | 851  | 853  | 855  | 858  | 860  | 862  |
| 1.1 | 0.864  | 866  | 869  | 871  | 873  | 875  | 877  | 879  | 881  | 883  |
| 1.2 | 0.885  | 887  | 889  | 891  | 893  | 894  | 896  | 898  | 900  | 902  |
| 1.3 | 0.903  | 905  | 907  | 908  | 910  | 911  | 913  | 915  | 916  | 918  |
| 1.4 | 0.919  | 921  | 922  | 924  | 925  | 926  | 928  | 929  | 931  | 932  |
| 1.5 | 0.933  | 935  | 936  | 937  | 938  | 939  | 941  | 942  | 943  | 944  |
| 1.6 | 0.945  | 946  | 947  | 948  | 9495 | 9505 | 9515 | 9525 | 9535 | 9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 9564 | 9573 | 9582 | 9591 | 9599 | 9608 | 9616 | 9625 | 9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 9650 | 9656 | 9664 | 9671 | 9678 | 9686 | 9693 | 9699 | 9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 9719 | 9726 | 9732 | 9738 | 9744 | 9750 | 9756 | 9762 | 9767 |
| 2.0 | 0.9773 | 9778 | 9783 | 9788 | 9793 | 9798 | 9803 | 9808 | 9812 | 9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 9826 | 9830 | 9834 | 9838 | 9842 | 9846 | 9850 | 9854 | 9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 9865 | 9868 | 9871 | 9875 | 9878 | 9881 | 9884 | 9887 | 9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 9896 | 9898 | 9901 | 9904 | 9906 | 9909 | 9911 | 9913 | 9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 9920 | 9922 | 9925 | 9927 | 9929 | 9931 | 9932 | 9934 | 9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 9940 | 9941 | 9943 | 9945 | 9946 | 9948 | 9949 | 9951 | 9952 |
| 2.6 | 0.9954 | 9955 | 9956 | 9957 | 9959 | 9960 | 9961 | 9962 | 9963 | 9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 9966 | 9967 | 9968 | 9969 | 9970 | 9971 | 9972 | 9973 | 9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 9975 | 9976 | 9977 | 9977 | 9978 | 9979 | 9979 | 9980 | 9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 9982 | 9983 | 9983 | 9984 | 9984 | 9985 | 9985 | 9986 | 9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 9987 | 9987 | 9988 | 9988 | 9989 | 9989 | 9989 | 9990 | 9990 |

### הנדסה אנליטית

קו ישר

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{משוואת ישר דרין } (x_1, y_1) \text{ ששיפועו } m :$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| \quad : y = m_2 x + n_2, \quad y = m_1 x + n_1 \quad \text{נוסחה לזוויות } \alpha \text{ שבין הישרים}$$

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \quad : y = m_2 x + n_2, \quad y = m_1 x + n_1 \quad \text{ניצבות הישרים}$$

$$d = \pm \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad : Ax + By + C = 0 \quad \text{מרחק הנקודה } (x_0, y_0) \text{ מהישר}$$

$$\left( \frac{kx_1 + kx_2}{k+1}, \frac{ky_1 + ky_2}{k+1} \right) \quad : (A(x_1, y_1); B(x_2, y_2)) \text{ ביחס } k : \text{ נקודה המחלקת את הקטע } AB \text{ ביחס } k$$

מעגל

$$\text{משוואת המשיק למעגל} \quad : (x_0, y_0) \text{ בנקודות } (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

$$(x_0 - a) \cdot (x - a) + (y_0 - b) \cdot (y - b) = R^2$$

$$: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{היפרבולה}$$

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

האסימפטוטות:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

מרחק המוקד מהראשית:

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

משיק להיפרbole בנקודה  $(x_0, y_0)$ :

$$n^2 = m^2 a^2 - b^2$$

התנאי שהישר  $y = mx + n$  ישיק להיפרbole:

פרבולה  $: y^2 = 2px$

$$yy_0 = p(x + x_0)$$

משיק לפרבולה בנקודה  $(x_0, y_0)$ :

$$n = \frac{p}{2m}$$

התנאי שהישר  $y = mx + n$  ישיק לפרבולה: