תכנית הלימודים בגאומטרייה לכיתה ט

לתלמידים מתקדמים ומתעניינים כוללת התכנית תוספת של תכנים משני סוגים:

א. פרקים עצמאיים בהיקף של 4 עד 10 שעות. דוגמאות לפרקים כאלה מופיעות בסוף התכנית.

ב. פרקונים קצרים בהיקף של כשיעור. דוגמאות לפרקונים כאלה מופיעות (עם רקע) בצמוד לנושאים בתכנית כהרחבה והעמקה.

תחום גאומטרי: 1. משפחת המרובעים (בגישה דדוקטיבית) (20 שעות)	
נושאי הלימוד	**הבהרות ודוגמאות**
	התלמידים יכירו את הגדרות המושגים, יכירו הוכחות של משפטים ויוכיחו טענות באופן עצמאי. בצד הלימוד הדדוקטיבי, התלמידים יעסקו גם בחישובי שטחים והיקפים.
א. חזרה על מקבילות אכסיומת המקבילים	**מאכסיומת המלבן, אם במרובע יש שלוש זוויות ישרות גם הרביעית ישרה והצלעות הנגדיות שוות זו לזו, נקבל שאם לשני ישרים במישור יש ניצב משותף אז כל ניצב לאחד הישרים ניצב לחברו, והמרחק בין הישרים קבוע (לכן או שהם מתלכדים או שאינם נפגשים). אכסיומת המקבילים הקלסית שקולה לאכסיומת המלבן (ללא הוכחה).**
ב. זוויות בין מקבילים וחותך **משפט:** **ישר החותך מקבילים יוצר זוויות מתחלפות שוות וזוויות מתאימות שוות.** **משפט:** **אם חותך של שני ישרים יוצר זוויות מתחלפות שוות או זוויות מתאימות שוות אז הישרים מקבילים.**	**המושגים: זוויות מתחלפות, זוויות מתאימות.** **זיהוי זוויות מתחלפות וזוויות מתאימות בין שני ישרים וחותך.** **בעקבות צמד המשפטים ייערך דיון בנושא: טענה וטענה הפוכה** **הערה: יש טענה וטענה הפוכה לה ששתיהן נכונות, אך יש להבהיר שלא כל הטענות ההפוכות לטענות נכונות הן נכונות.** **אם ניתן להוכיח טענה הפוכה למשפט, אז הטענה ההפוכה אף היא משפט.** **דוגמאות:** א. טענה נכונה והטענה ההפוכה לה נכונה

	טענה: במשולש שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות זו לזו. טענה הפוכה: משולש שבו יש שתי זוויות שוות הוא משולש שווה שוקיים. ב. טענה נכונה והטענה ההפוכה לה אינה נכונה טענה: בריבוע האלכסונים ניצבים ושווים זה לזה. טענה הפוכה: מרובע שבו האלכסונים ניצבים ושווים זה לזה הוא ריבוע (הראו על ידי דוגמה נגדית).
ג. המקבילית ותכונותיה	**הגדרה: מקבילית היא מרובע שבו כל זוג צלעות נגדיות מקבילות זו לזו.** **הערה: ניתן גם להגדיר אחרת ולשנות בהתאם את מערכת המשפטים על התכונות.** **חזרה על שטח משולש ומעבר לשטח מקבילית.**
משפט: **צלעות נגדיות במקבילית שוות זו לזו.** **משפט:** **זוויות נגדיות במקבילית שוות זו לזו.**	**מסקנה: סכום שתי זוויות סמוכות במקבילית הוא 180^0.**
משפט: **אם במרובע שני זוגות הצלעות הנגדיות שוות זו לזו – המרובע הוא מקבילית.** **משפט:** **אם במרובע שני זוגות הזוויות הנגדיות שוות זו לזו – המרובע הוא מקבילית.** **משפט:** **אם שתי צלעות במרובע שוות ומקבילות זו לזו אז המרובע הוא מקבילית.** **משפט:** **אלכסוני המקבילית חוצים זה את זה.** **משפט:** **מרובע שאלכסוניו חוצים זה את**	**דיון: ניסוח טענות הפוכות לשני המשפטים הראשונים שבימין, בחירת הטענות הנכונות והוכחתן.**

זה הוא מקבילית. **ד. תכונות של המלבן** **משפט:** **במלבן האלכסונים שווים זה לזה (הוכח בכיתה ז').** **משפט:** **מקבילית שאלכסוניה שווים זה לזה היא מלבן.** **משפט:** **במשולש ישר זווית, התיכון ליתר שווה למחצית היתר.** **ה. המעוין ותכונותיו** **משפט:** **אלכסוני המעוין ניצבים זה לזה וחוצים את זוויות המעוין.** **משפט:** **מקבילית שאלכסוניה מאונכים זה לזה היא מעוין.** **משפט:** **מקבילית שאחד מאלכסוניה חוצה את אחת מזוויותיה היא**	**טענה: מקבילית ישרת זווית היא מלבן.** **דיון: התייחסו לטענות הבאות, מי מהן נכונה? מדוע?** **א. מרובע שאלכסוניו שווים זה לזה הוא מלבן.** **ב. מקבילית שאלכסוניה שווים זה לזה היא מלבן.** **חישוב שטח המלבן (חזרה, כולל מלבנים שצלעותיהם נמדדות בשברים).** **הגדרה: מעוין הוא מרובע שכל צלעותיו שוות זו לזו.** **על סמך הטענה - מרובע שצלעותיו הנגדיות שוות זו לזו הוא מקבילית - נקבל שהמעוין הוא מקבילית מיוחדת ולכן יש למעוין את כל תכונות המקבילית.** **הערה: ניתן גם להגדיר אחרת את המעוין.** **ניסוח טענות הפוכות למשפטים שבימין והוכחתם.** **חישוב שטח של מעוין.**

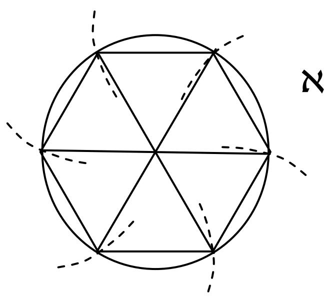
מעוין. **ו. תכונות הריבוע** **ז. דלתון** • **הגדרת הדלתון ותכונותיו** **משפט:** **האלכסון הראשי של הדלתון ניצב לאלכסון המשני וחוצה את זוויות הראש של הדלתון.** **משפט:** **בדלתון הזוויות - שאינן זוויות ראש - שוות זו לזו.** **ח. טרפז** • **הגדרת הטרפז ותכונותיו** **משפט:** **בטרפז שווה שוקיים שוות זוויות הבסיס זו לזו, והאלכסונים שווים זה לזה.** **משפט:** **טרפז שאלכסוניו שווים זה לזה הוא טרפז שווה שוקיים.**	 **הריבוע הוא מעוין ישר זווית והוא מלבן שווה צלעות.** **התכונות הנגזרות מהיותו מלבן או מהיותו מעוין.** **הגדרה: דלתון הוא מרובע שיש לו שני זוגות נפרדים של צלעות סמוכות השוות זו לזו.** **קדקוד ראש: קדקוד הנמצא בין שתי צלעות שוות.** **אלכסון ראשי: אלכסון המחבר את שני קדקודי הראש.** **האלכסון האחר נקרא: אלכסון משני.** **הגדרה: טרפז הוא מרובע שבו זוג אחד בלבד של צלעות מקבילות זו לזו.** **הצלעות המקבילות נקראות: בסיסי הטרפז.** **הצלעות שאינן מקבילות נקראות: שוקי הטרפז.** **הערה: המילה "בלבד" שבהגדרת הטרפז באה על מנת שמקבילית לא תיחשב טרפז, ובמשפט על טרפז שווה שוקיים לא נצטרך להוסיף את המילים "שאינו מקבילית".** **ניתן גם להוכיח שמרובע הוא טרפז אם מראים שלמרובע שתי צלעות מקבילות שונות באורכן.**

משפט: **טרפז שיש לו זוג של זוויות בסיס שוות זו לזו הוא טרפז שווה שוקיים.**	**מציאת שטח טרפז או באמצעות חלוקה לחלקים או הכפלת הטרפזים למקבילית או הפיכת הטרפז למשולש.**

תחום גאומטרי: 2. משולשים (14 שעות)	
נושאי הלימוד	**הבהרות ודוגמאות**
צלעות וזוויות במשולש **משפט:** **סכום הזוויות הפנימיות במרובע הוא 360^0.** **משפט:** **סכום הזוויות במצולע קמור בעל n צלעות הוא: $180^0(n-2)$** **זווית חיצונית במצולע קמור** **משפט:** **זווית חיצונית במשולש שווה לסכום שתי זוויות המשולש שאינן צמודות לה.** **משפט:** **סכום הזוויות החיצוניות, במגמה אחת, במצולע קמור הוא 360^0.** **משפט:** **במשולש, מול הצלע הגדולה**	**ההוכחה מסתמכת על סכום זוויות במשולש ועל כך שכל מרובע ניתן לחלק לשני משולשים.** **מרובע שאינו קמור מספק הזדמנות לדבר על זווית בת יותר מ- 180^0.** **בכיתות מתקדמות אפשר להוכיח שהטענה נכונה גם למצולעים שאינם קמורים.** **מצולע קמור הוא מצולע שכל אלכסוניו פנימיים.** **הגדרה: זווית חיצונית במצולע קמור היא זווית שבין צלע המצולע לבין המשך צלע אחרת.**

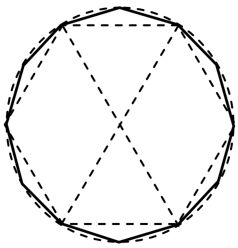
יותר נמצאת הזווית הגדולה יותר. **משפט:** **במשולש, מול הזווית הגדולה יותר נמצאת הצלע הגדולה יותר.** **משפט:** **סכום שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית.**	
קטע אמצעים במשולש **משפט:** **קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.** **משפט:** **קטע היוצא מאמצע צלע אחת במשולש ומקביל לצלע שנייה, חוצה את הצלע השלישית.**	**הגדרה: קטע המחבר אמצע צלע אחת במשולש עם אמצע צלע אחרת במשולש הוא קטע אמצעים.**
בניות בסרגל ומחוגה **העתקת קטע, חציית קטע,** **העתקת זווית, חציית זווית,** **העברת אנך מנקודה מחוץ לישר,** **העברת אנך מנקודה על הישר.**	**נושא הבניות יילמד במשולב עם התכנים הקודמים לפי הצורך.** **יש להרגיל את התלמידים לסרטט במדויק במהלך הלימוד השוטף.**

תחום גאומטרי: 3. מעגל (20 שעות)

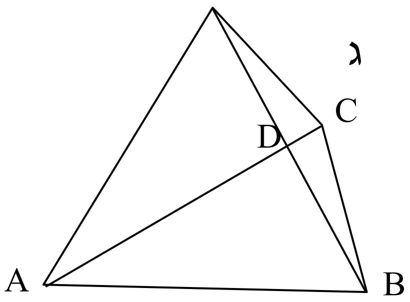
נושאי הלימוד	**הבהרות ודוגמאות**
• **הגדרת המעגל ותכונותיו** **- מושגים**	**הגדרות:** **מעגל: קבוצת כל הנקודות שמרחקן מנקודה מסוימת שווה לאורך מסוים קבוע נקראת מעגל. הנקודה היא מרכז המעגל והאורך הקבוע הוא אורך הרדיוס.** **רדיוס המעגל: קטע המחבר את מרכז המעגל עם נקודה על המעגל.** **מיתר: קטע המחבר שתי נקודות על המעגל.** **קוטר המעגל: מיתר העובר דרך מרכז המעגל.** **קשת: חלק מהמעגל המוגבל על ידי שתי נקודות.** **שימו לב: שתי נקודות שעל מעגל מחלקות אותו לשתי קשתות.** **זווית מרכזית: זווית שקדקודה במרכז המעגל ושוקיה רדיוסים.** **זווית היקפית: זווית שקדקודה על היקף המעגל ושוקיה חותכים את המעגל.** **- חזרה על נוסחאות שטח העיגול והיקפו.**
הרחבה לתלמידים מתקדמים:	**דוגמה: קירובי ∏** **היחס בין היקף המעגל לקוטרו הוא יחס קבוע (כלומר, שווה בכל המעגלים, קטנים כגדולים). משום כך ניתן למצוא קירובים ליחס זה באמצעות מדידה או באמצעות חישובים פשוטים, וכך אכן עשו המדענים בימי קדם.** **נראה כיצד מקבלים שהיקף מעגל גדול יותר מפי שלושה מהקוטר.** **דרך ההיסק: נצא מנקודה שעל המעגל ובסיוע קשתות שמחוגן כמחוג המעגל נבנה בזה אחר זה משולשים שווי צלעות כבציור א. נקבל סגירה מדויקת כי הזוויות בנות 60^0.** **אורך צלע המשולש שווה לרדיוס המעגל, היקף המשושה שווה 6R.** **היקף המעגל, הגדול מהיקף המשושה, שווה 2∏ R ולכן 3<∏.**  א **נעבור למצולע בן 12 צלעות על-ידי חציית זוויות (ציור ב) ונחשב**

(בסימונים של ציור ג):

ב



ג



AD = $\sqrt{1-0.5^2}$ **= 0.866025**

DC = 1- 0.866025 = 0.133975

BC = $\sqrt{0.5^2+0.133975^2}$ **= 0.517638…..**

$\prod > 6 \cdot 0.517638 = 3.105828$

ואפשר להמשיך למצולע בן 24 צלעות ולהשתמש בקירוב שהתקבל:

BC = 0.517638/2 וכן הלאה. נקבל סדרה של מספרים הולכים וגדלים המתקרבים ל- $\prod$**.**

הראנו כיצד אפשר לקבל סדרה של מספרים המתקרבים ל- $\prod$ **מלמטה.**

בצורה דומה, על ידי בניית מצולעים חוסמים למעגל, ניתן למצוא סדרה של מספרים המתקרבים ל- $\prod$ **מלמעלה.**

שתי סדרות המספרים נותנות קירוב ל- $\prod$**.**

הערות:

א. אם במעגל שרדיוסו 1 יש לזווית מרכזית מסוימת מיתר באורך a אז למחציתה יש מיתר באורך $\sqrt{a^2/4+\left(1-\sqrt{1-a^2/4}\right)^2}$ **השווה ל-** $\sqrt{2-\sqrt{4-a^2}}$**.**

אם נצא מ-a = 0.517638 אז בשלושה צעדי חישוב נקבל מספר שמרחקו מ- $\prod$ **קטן מאלפית.**

ב. ביטוי אחר בשביל המיתר החדש הוא $\dfrac{a}{\sqrt{2+\sqrt{4-a^2}}}$ **. יתרונו בזה שהוא מראה שככל ש-a קטן כן קרוב המיתר החדש להיות שווה לחצי**

	המיתר הקודם. **ג. אופציה: שימוש בנ"ל בגליון אלקטרוני**
משפט: **במעגל, שתי זוויות מרכזיות שוות זו לזו אם ורק אם יש להן קשתות מתאימות שוות זו לזו.** **משפט:** **במעגל, שתי זוויות מרכזיות שוות זו לזו אם ורק אם יש להן מיתרים שווים זה לזה.**	**הוכחה על ידי הנחת הגזרות זו על זו, הוכחה לא פורמלית.** **מסקנה: במעגל, מיתרים שווים זה לזה אם ורק אם יש להם קשתות שוות זו לזו.**
משפט: **האנך ממרכז המעגל למיתר חוצה את המיתר, חוצה את הזווית המרכזית המתאימה למיתר וחוצה את הקשת המתאימה למיתר.**	
משפט: **זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית המונחת על אותה הקשת.** **מסקנה:** **במעגל, לזוויות היקפיות שוות קשתות שוות ומיתרים שווים.** **מסקנה:** **במעגל, לקשתות שוות מתאימות זוויות היקפיות שוות.**	
משפט: **ככל שמיתר במעגל גדול יותר, מרחקו מהמרכז קטן יותר.**	**אפשר להוכיח את המשפט על סמך משפט פיתגורס.**

- משיק למעגל **משפט:** **המשיק למעגל הינו ישר בעל נקודה משותפת יחידה עם המעגל.** **משפט:** **זווית הכלואה בין משיק ומיתר היוצאים מנקודה אחת שעל המעגל שווה לזווית ההיקפית הנשענת על הקשת הכלואה בין המשיק והמיתר.** **משפט:** **שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה – שווים זה לזה.**	**הגדרה: משיק הינו ישר המאונך לקצה של רדיוס על היקף המעגל.**

תחום גאומטרי: 4. גאומטרייה של המרחב (6 שעות)	
נושאי הלימוד	**הבהרות ודוגמאות**
משפט: **ישר, העובר בנקודה שבמישור וניצב שם לשני ישרים שונים שבמישור זה, ניצב גם לכל ישר הנמצא באותו מישור ועובר באותה נקודה.** **הגדרה:** **ישר כזה נקרא אנך למישור.**	**מומלץ להקדים הצגה הסתכלותית של המשפט. למשל, כשספר פתוח עומד על השולחן ניצבת שדרתו (= גב הספר) לא רק לצלעות התחתונות של עמודי הכריכה אלא גם לאלה של כל העמודים. בכיתות רגילות ישמש הדבר תחליף להוכחה ובכיתות חזקות יסייע להבנתה (מחקר הראה ששכנוע מוקדם בנכונותה של טענה מסיע להבנת ההוכחה).** **ראו נספח על דרך להכנסת המשפט והוכחתו. (ההבדלים שבין ההוכחה המוצעת ובין ההוכחה הקלסית הבעייתית קשורים בהבנה שונה של המלה "פשוט").** **שימוש במשפט לחישוב אלכסון של תיבה שמקצועותיה נתונים.**

דוגמאות:

א. הראו שהאנך מנקודה למישור קצר מכל קטע אחר המחבר את הנקודה והמישור.

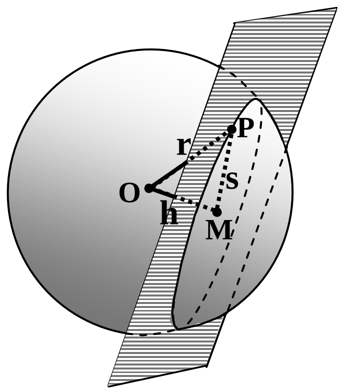
ב. למתקדמים: בסיסה של פירמידה חסום במעגל ומקצועותיה הצדדיים שווים זה לזה. הוכיחו שהגובה עובר במרכז המעגל.

משפט:

מחיתוך של מישור וכדור מתקבל מעגל.

הוכחה:

יהי r רדיוס הכדור, ויהי OM אנך ממרכז הכדור אל המישור ואורכו h .
תהי P נקודה כלשהי בחיתוך של הכדור והמישור ונסמן את מרחקה מ-M ב- s. מרחקה מ-O הוא כמובן r.
נקבל ש- $s^2 = r^2 - h^2$ לכן אותו ערך s יתקבל לכל נקודה שבחיתוך הנ"ל לכן נקודות החיתוך יוצרות מעגל שמרכזו M ורדיוסו s.



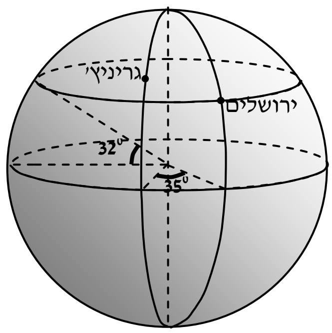
מעגל גדול על כדור

הגדרה:

מעגל גדול על כדור הוא מעגל שמרכזו מתלכד עם מרכז הכדור.

טענה:

דרך שתי נקודות שאינן על קוטר עובר מעגל גדול יחיד.



קווי אורך וקווי רוחב על כדור הארץ

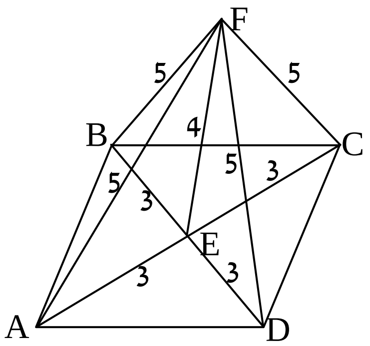
(המסלול האווירי הקצר מלוד להונולולו עובר קרוב לקוטב הצפוני)

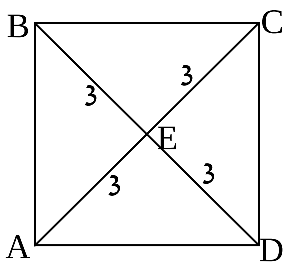
דוגמה:

בהנחה שכדור הארץ הוא אמנם כדור ורדיוסו 6,371 ק"מ. (במציאות הכדור קצת פחוס והרדיוס הנזכר הוא רדיוס ממוצע) סרטטו משולש ישר זווית עם זווית בת 32^0 ומדדו את צלעותיו. פי כמה גדול רדיוס כדור הארץ מן היתר שבמשולש שלכם? מצאו לפי זה ערך מקורב בשביל רדיוס קו הרוחב של ירושלים, ובשביל אורכו של קו הרוחב.

נספח: ישר ניצב למישור

אמיתי וגלעד רצו להעמיד תורן לדגל, שיהיה ניצב לקרקע, ותכניתם הייתה זאת: נסרטט על הקרקע ריבוע שאלכסוניו באורך 6 מטר (ולכן כל חצי אלכסון יהיה באורך 3 מטר). בגובה 4 מטר מתחתית התורן נקשור ארבעה חבלים שאורך כל אחד 5 מטר ובקצהו לולאה, נשים את תחתית התורן במרכז הריבוע ונרכיב את הלולאות על יתדות שנתקע בארבעת קדקודי הריבוע. באופן זה נקבל ארבעה משולשים שצלעותיהם 3, 4 ו-5 מטר לכן הם ישרי זווית.



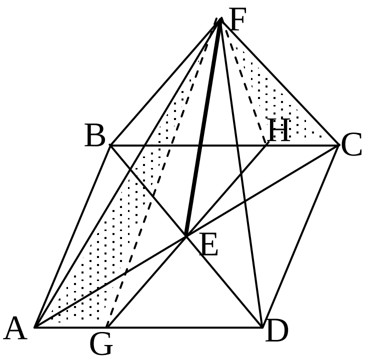


(בציור שמימין הריבוע שעל הקרקע ובציור שמשמאל מבט אלכסוני על תוכנית ההעמדה של התורן. במבט אלכסוני עשויים קטעים שווים להיראות שונים. למשל, בציור נראה AF גדול בהרבה מ-BF למרות ששניהם באורך 5, והזוויות נראות שונות מגודלן האמיתי.)

אמר גלעד: בגלל פיתגורס יהיה התורן ניצב לאלכסוני הריבוע, אבל האם אתה בטוח שהוא יהיה ניצב גם לכל ישר אחר המונח על הקרקע ועובר דרך E ?

אמר אמיתי: אני בטוח בזה, ואני חושב שאצליח גם להוכיח זאת, אבל בוא נקרא לשירה. היא חזקה בגאומטרייה וודאי תוכל למצוא הוכחה.

אמרה שירה: תחילה אוכיח כבקשתכם, אחר כך אראה שבאותה דרך אפשר להוכיח משפט יותר כללי, ולבסוף אציע על סמך המשפט והוכחתו דרך שתקל את עבודתכם.



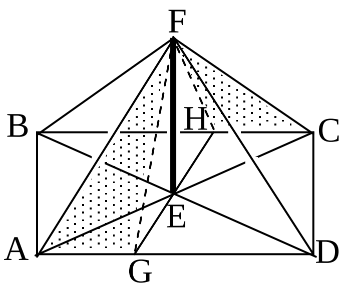
ובכן, יהי נתון על הקרקע ישר כלשהו העובר דרך E, ונסמן את נקודות חיתוכו עם הריבוע ב- G ו- H.

המשולשים AGE ו- CHE שישר זה חותך מן הריבוע חופפים זה לזה על פי זצ"ז, כי לשניהם צלע באורך 3 ושתי הזוויות שעל ידה במשולש האחד שוות למתאימות להן במשולש השני כקדקודיות או כמתחלפות בין מקבילים. לכן AG=CH ו- GE=HE .

נחבר את H ו-G אל F ונקבל את המשולשים GAF ו- HCF (המשולשים הנקודים שבציור). משולשים אלה חופפים לפי צז"צ כי (א) הזווית A ו-C במשולשים אלה שוות כי הן מתאימות במשולשי הפאות של הפירמידה (פאות אלה חופפות לפי צצ"צ). (ב) CF=AF כי שתיהן בנות 5 מטר. (ג) AG=CH כמוכח לעיל.

לכן המשולש HFG הוא שווה-שוקיים וכבר הוכחנו ש- GE=HE, לכן FE הוא תיכון לבסיס במשולש שווה שוקיים, לכן ניצב לבסיס. ∎

והרי משפט כללי: אם ישר ניצב לשני ישרים שונים הנמצאים במישור אחד אז הוא ניצב לכל ישר אחר הנמצא באותו מישור ופוגש את שלושת הישרים.

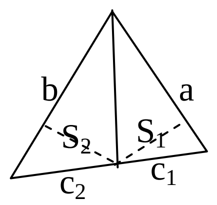
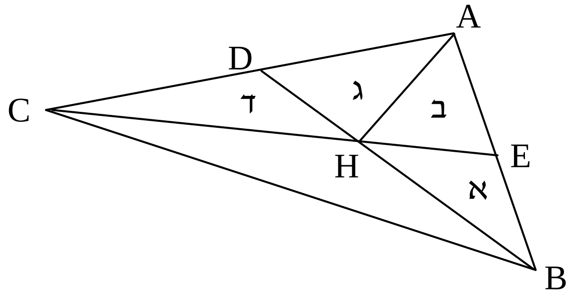


הוכחה: לכל שני ישרים שעל הקרקע נוכל ליצור מלבן כבציור, ובכל ההוכחה שלעיל לא השתמשנו בשום תכונה של ריבוע שאינה גם תכונה של מלבן, וגם לא השתמשנו בזה שהמשולשים ישרי הזווית נוצרו דווקא מצלעות של 3, 4 ו-5 אלא רק בשוויון הצלעות המתאימות שבמשולשים אלה ∎

כתוספת אמרה שירה: בעקבות המשפט הכללי ודברים שהופיעו בהוכחה תוכלו לחסוך קצת עבודה. אינכם חייבים להבטיח ש-BD ו-AC יהיו אלכסוני ריבוע, ולא להקפיד על האורכים 3, 4 ו-5. כל הנדרש הוא להבטיח את השוויונות FA=FC ו-.FB=FD על ידי שני זוגות של חבלים נגדיים שווי אורך המחוברים לקרקע במרחקים שווים.

נושאים למתקדמים – דוגמאות

הוכחות על ידי שטחים (4 שעות)

הנושאים	**הבהרות ודוגמאות**
משפט: **חוצה זווית מחלק את הצלע שמול הזווית ביחס הצלעות האחרות שעל יד כל חלק.**	**הוכחה:** **נסרטט חוצה זווית לאחת מזוויות המשולש. מנקודת החיתוך של חוצה הזווית עם הצלע שממול לזווית נסרטט אנכים לשתי הצלעות האחרות של המשולש. אנכים אלה שווים זה לזה.** **נסמן את הצלעות, את חלקי-הצלע ואת שטחי שני המשולשים כבציור.** **בגלל שוויון הגבהים לצלעות a, b יהיה** $S_1/S_2 = a/b$ **כמו כן, בגלל הגובה המשותף לצלע c יהיה** $S_1/S_2 = c_1/c_2$ **לכן** $c_1/c_2 = a/b$ 
משפט: **בנקודת פגישתם מחלקים שני תיכונים במשולש זה את זה ביחס 1:2 .**	**הוכחה:** **במשולש ABC נעביר תיכונים BD ו- CE , נחבר את נקודת פגישתם H אל A ונסמן את שטחי המשולשים כבציור.** **א+ב+ג = ב+ג+ד כי הם חצאים של שטחי המשולש הגדול, כיוון שכל תיכון מחלק את שטח המשולש לשני חלקים שווים.** **לכן א = ד.** **א=ב, כי הם חצאים של שטח המשולש AHB .** **מאותה סיבה, ג=ד.** **לכן:** **א=ב=ג=ד** **לכן** **ג+ד=2ב**  **ואם נסתכל על ג+ד ועל ב כעל משולשים בעלי גובה משותף היורד מ-A נמצא ש- CH = 2 HE** ■

משפט צֶ'בה:

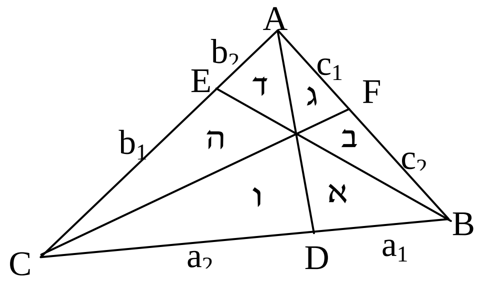
במשולש ABC שלושת הקטעים AD, BE, CF נחתכים בנקודה אחת K אם ורק אם מתקיים:

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$

הוכחה:

כיוון אחד:

נעביר "קווי-צ'בה" הנפגשים בנקודה אחת ונסמן את חלקי הצלעות ואת שטחי המשולשים כבציור.



נסתכל על א+ב+ג ועל ד+ה+ו כעל שני משולשים בעלי גובה משותף ונקבל $\frac{a_1}{a_2}=\frac{\text{א}+\text{ב}+\text{ג}}{\text{ו}+\text{ה}+\text{ד}}$

ומכיוון שגם $\frac{a_1}{a_2}=\frac{\text{א}}{\text{ו}}$ **נקבל ש-** $\frac{a_1}{a_2}=\frac{\text{ב}+\text{ג}}{\text{ה}+\text{ד}}$

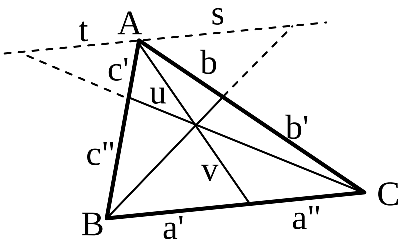
באופן דומה, $\frac{b_1}{b_2}=\frac{\text{ו}+\text{א}}{\text{ג}+\text{ב}}$ **ו-** $\frac{c_1}{c_2}=\frac{\text{ה}+\text{ד}}{\text{ו}+\text{א}}$

לכן $\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{b_1}{b_2}\cdot\frac{c_1}{c_2}=\frac{\text{ב}+\text{ג}}{\text{ה}+\text{ד}}\cdot\frac{\text{ו}+\text{א}}{\text{ג}+\text{ב}}\cdot\frac{\text{ה}+\text{ד}}{\text{ו}+\text{א}}=1$

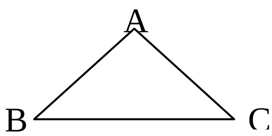
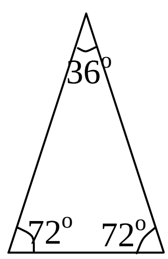
תוספת: נסמן את הקטע המשותף ל-ג ו-ד ב-u ואת הקטע המשותף ל-א ו-ו ב-v ואז $\frac{u}{v}=\frac{\text{ג}+\text{ב}}{\text{א}}$ **וגם** $\frac{u}{v}=\frac{\text{ה}+\text{ד}}{\text{ו}}$

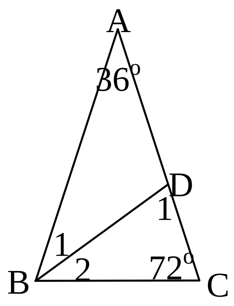
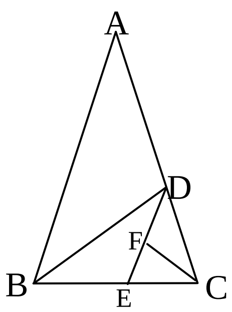
לכן גם $\frac{u}{v}=\frac{\text{ה}+\text{ד}+\text{ג}+\text{ב}}{\text{ו}+\text{א}}$ **לכן** $\boxed{\frac{b_2}{b_1}+\frac{c_1}{c_2}=\frac{u}{v}}$

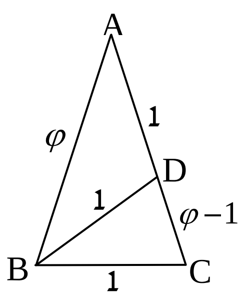
קווי צ'בה (Ceva) – חקירה בעזרת תוכנת גאומטרייה דינמית (2 שעות)

משפט צ'בה: **אם שלושה קטעים משלושת הקדקודים A, B ו-C של משולש אל הצלעות a, b ו-c מחלקים את הצלעות לששה חלקים 'a, "a , 'b, "b, 'c ו-"c בסדר מעגלי (כבציור), אז הקטעים נפגשים בנקודה אחת אם ורק אם** $\frac{a'}{a''}\cdot\frac{b'}{b''}\cdot\frac{c'}{c''}=1$	**והרי תקציר הוכחה בשביל הכיוון שבו נתונה פגישת הקטעים.** **נעביר מקביל, נאריך קטעים ונסמן כבציור.** **על-ידי דמיון משולשים נקבל** **א.** $\frac{b'}{b''}=\frac{a}{s}$ **ב.** $\frac{c'}{c''}=\frac{t}{a}$ **ג.** $\frac{t}{a''}=\frac{u}{v}=\frac{s}{a'}$ **לכן** $\frac{a'}{a''}=\frac{s}{t}$  **ומכאן** $\frac{a'}{a''}\cdot\frac{b'}{b''}\cdot\frac{c'}{c''}=\frac{s}{t}\cdot\frac{a}{s}\cdot\frac{t}{a}=1$ **הוכחה אחרת מופיעה בתכניתנו בהצעה "הוכחות על ידי שטחים".** **הוכחות נוספות ועוד מידע מעניין אפשר למצוא באתרים** **www.cut-the-not.org/Generalization/ceva.shtml** **www.ies.co.jp/math/java/vector/ceva/ceva.html** **בהמשך ההוכחה שלעיל הרי משהו נוסף:** $\frac{b''}{b'}+\frac{c'}{c''}=\frac{s}{a}+\frac{t}{a}=\frac{s+t}{a}=..=\frac{u}{v}$
<u>גוף ההצעה</u> **בנו משולש כלשהו בעזרת תוכנה של גאומטרייה דינמית. (קדקודי המשולש יינתנו לגרירה חפשית ממקום למקום). בחרו שתי נקודות על שתים מהצלעות (הן יינתנו לגרירה רק לאורך הצלעות). חברו אותן לקדקודים שמולן וקבעו את נקודת החיתוך של שני הקטעים. העבירו קו דרך הקדקוד השלישי ונקודת החיתוך וסמנו את הנקודה שהוא קובע על המשולש. השתמשו באופציות המדידה ובגרירות לחיפוש חוקיות.**	**תלמידים יוכלו לשים לב לכך שאם שנים מקטעי "קדקוד לצלע" הם תיכונים/חוצי-זוית/גבהים אז גם השלישי הוא מאותו סוג.** **הנחיות ממוקדות (דוגמא קיצונית: "חשבו את a'b'c' ואת a"b"c" וראו מה קורה בעקבות גרירות של נקודות") יוליכו אל משפט צ'בה. אם המשפט התקבל במהירות מוצע לעבור לשאלה באיזה אופן הוא מהווה הכללה למשפטים מוכרים.** **הנחיות פחות ממוקדות, כגון "מה קורה כשעוברים משני תיכונים אל שני מחלקים-ביחס- 1:2", יכולות להוביל למסלול חיפוש יותר ארוך אך כולל יותר תוצאות-ביניים ויותר הוכחות.** **מסלול כזה עשוי שלא להוביל אל משפט צ'בה אלא, למשל, לכיוון הקרוב למשהו הנוסף שנזכר במבוא שלעיל. דבר כזה אינו צריך להיחשב החטאת המטרה. הדבר החשוב אינו קבלת תוצאה מסוימת אלא עצם התהליך הכולל העלאת השערות ובדיקתן.**

משולש הזהב (6 שעות)

הנושאים	**הבהרות ודוגמאות**
הגדרה: **משולש זהב הוא משולש שזוויותיו הן 36^o, 72^o ו- 72^o.** **משפט:** **לא יתכן משולש זהב שגם הבסיס שלו וגם השוק נמדדים במספר סנטימטרים שלם (והוא הדין לכל יחידת מידה אחרת).**	**סעיף א:** **בסעיף זה נסתמך על שני משפטים:** **1. משפט:** **אם במשולש שתי זוויות שוות אז המשולש הוא שווה-שוקיים.** **משפט זה הוכח בכיתה ח'. נראה כאן הוכחה נוספת.** **הוכחה:** **יהי נתון משולש ABC עם $\angle B = \angle C$,** **ונוכיח כי $AB = AC$.**  **ממשפט החפיפה השני זצ"ז נובע שהמשולש ABC חופף לעצמו לא רק בדרך הישרה, כמו שכל משולש חופף לעצמו, אלא גם בחילוף תפקידים של B ו-C, כלומר, $\Delta ABC \cong \Delta ACB$. מחפיפה זאת נובע השוויון המבוקש.** **הערה: המשפט ההפוך למשפט הראשון שהזכרנו אומר שאם משולש הוא שווה שוקיים אז יש לו שתי זוויות שוות (זוויות הבסיס), ובדרך כלל לומדים אותו לפני המשפט הנוכחי. כאן לא נזדקק לו.** **2. משפט:** **סכום הזוויות במשולש שווה ל- 180^0.** 

משפט: **חוצה זווית-בסיס של משולש זהב מחלק אותו לשני משולשים שווי שוקים שאחד מהם גם הוא משולש זהב.**	**הוכחה:** **נסמן חוצה זווית, קדקודים וזוויות כבציור.** **הזווית B_1 היא בת 36° (מדוע?),** **לכן** $AD = BD$ **.** **הזווית B_2 גם היא בת 36°,** **ומכיוון שסכום הזוויות של המשולש BDC** **הוא 180° תהיה הזווית D_1 בת 72° לכן** $BD = BC$ **.**  **הוכחתנו נותנת משהו נוסף והוא השוויון** $AD = BC$ **.** **מסקנה: חוצה זווית בסיס במשולש זהב מחלק את השוק שמולה לשני חלקים כך שהחלק הרחוק מהבסיס שווה לבסיס.** **הוכחת המשפט הראשון:** **נראה שלא ייתכן שגם AC וגם BC נמדדים במספר סנטימטרים שווה.** **אילו היו הבסיס והשוק באורכים בני מספרים שלמים של סנטימטרים, היה גם הפרשם CD שווה למספר סנטימטרים שלם. ומכיוון שגם המשולש BDC הוא משולש זהב,** **נוכל לחצות את זווית הבסיס D שלו ולקבל משולש זהב חדש DCE וגם צלעותיו צריכות להיות במספרי סנטימטרים שלמים כיוון שהן התקבלו מחיסור של שני מספרים טבעיים (אורכי הצלעות).**  **כעת נחצה את הזווית C ונקבל משולש זהב EFC יותר קטן, וכמקודם נקבל שגם צלעותיו בנות מספר סנטימטרים שלם.** **אך כשנמשיך בתהליך זה נגיע לבסוף למשולש שצלעותיו קטנות מסנטימטר אחד, ואלה אינן נמדדות במספר סנטימטרים שלם.** **קיבלנו סתירה ולכן לא ייתכן שאורך השוק ואורך הבסיס במשולש זהב שניהם נמדדים במספר שלם של סנטימטרים.** **הערה: כל האמור עד כאן נכון לא רק למדידה בסנטימטרים אלא גם**

	למדידה באינצ'ים או למדידה במילימטרים, או למדידה ביחידת- מידה שגודלה שביעית של אלפית של מילימטר או לכל יחידת מידה אחרת. בשום יחידת מידה לא ימדדו גם AC וגם BC במספרים שלמים.
סימון: **היחס שבין אורך השוק ואורך הבסיס במשולש זהב יסומן באות היוונית** φ**(קְרי פִי ב-פ לא דגושה) והוא נקרא יחס הזהב או מספר הזהב.** **משפט:** φ **אינו מספר רציונאלי.** **משפט:** $\varphi^2-\varphi-1=0$	**סעיף ב:** **בסעיף זה נסתמך על המשפט:** **משפט:** **אם לשני משולשים אותן זוויות אז היחס שבין שתי צלעות של אחד מהם שווה ליחס בין הצלעות המתאימות להן במשולש השני.** **בפרט נובע ממשפט זה שהיחס שבין אורך שוק ואורך הבסיס במשולש זהב אחד שווה ליחס בין אורך שוק ואורך בסיס בכל משולש זהב אחר.** **ובדוגמתנו.** $AC/BC=BC/CD$ **הוכחה:** **מהסעיף הקודם נובע ש-** φ **אינו שבר פשוט, כלומר, אינו שווה לשום מנה של שני מספרים שלמים. ואמנם, אילו היו קיימים m ו-n שלמים כך ש-** $\frac{AC}{BC}=\frac{m}{n}$ **יכולנו לבחור בקטע שאורכו** BC/n **כיחידת מידה, ואז היה BC מורכב מ- n קטעים כאלה ו- AC היה מורכב מ-m קטעים כאלה, בניגוד למה שהוכחנו בסעיף א.** **חישוב** φ **:** **לצורך החישוב נבנה משולש-זהב ABC עם BC = 1, ומכיוון ש-** $AB/BC=\varphi$ **יהיה** $AB=\varphi$ **וכמובן גם** $AC=\varphi$ **.** **נעביר חוצה זווית BD כמקודם ונקבל משולשים שווי שוקיים ששוקיהם באורך 1 כבציור, לכן** $CD=\varphi-1$ **.** 

מזה ומהמשפט על יחסי הצלעות נובע ש- $\frac{\varphi}{1}=\frac{1}{\varphi-1}$ **, ומזה נקבל על ידי פעולות אלגבריות שתי מסקנות** **א.** $\varphi^2-\varphi-1=0$

ב. $\varphi=1+\frac{1}{\varphi}$

בסעיף הנוכחי נשתמש ב-א לחישוב φ**, ובסעיף הבא נחשב את** φ **בדרך אחרת, בעזרת ב.**

φ **הוא מספר חיובי, ולפי א הוא ממלא את המשוואה הריבועית** $x^2-x-1=0$**, מכאן נובע ש-**

$$\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{1+2.2360679}{2}=1.6180339$$

נציין שהשוויון $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ **הוא מדויק, אבל המסקנה** $\varphi=1.6180339$ **היא מעוגלת. היא אינה יכולה להיות מדויקת, שהרי** $1.6180339=\frac{16180339}{10000000}$ **וכבר הוכחנו ש-** φ **אינו שווה למנה של שני מספרים שלמים.**

אי-הדיוק נכנס כשכתבנו 2.2360679 במקום $\sqrt{5}$**.**

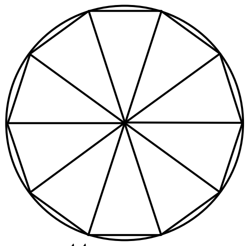
שאלות:

א. האם יתכן שבעזרת חישוב $\sqrt{5}$ **בדיוק של 20 ספרות או יותר נקבל ערך מדויק של** φ**?**

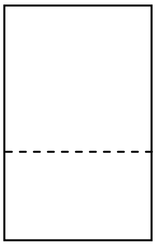
ב. האם ניתן לכתוב את $\sqrt{5}$ **כמנה של שני מספרים שלמים?**

נספחים קטנים

א. עשרה משולשי-זהב חופפים מרכיבים מעושר משוכלל.



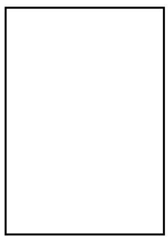
מעושר משוכלל חסום במעגל



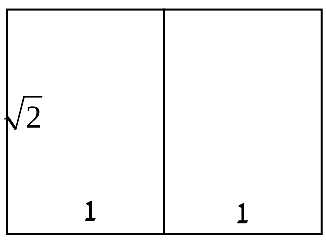
מלבן זהב

ב. מלבן שאורכו גדול פי φ מרוחבו היה נחשב בעיני היונים הקדומים למלבן היפה ביותר. הוא נקרא מלבן הזהב. אם חותכים ממנו ריבוע נותר מלבן שצלעותיו פרופורציוניות לצלעות המלבן המקורי.

ג. מימדיו של דף A4 הם 21 ס"מ על 29.7 ס"מ. היחס ביניהם קרוב מאד ל- $\sqrt{2}$.



דף A4 מוקטן



($21\cdot\sqrt{2}=29.69848...$ אך אין לבקש מחותכי נייר דיוק של מאיות המילימטר.)

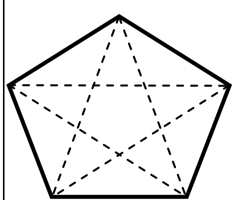
יחס זה מקובל היום לא בגלל שינוי במושגי היופי אלא משום שצירוף שני מלבנים בעלי יחס צלעות זה נותן מלבן בעל אותו יחס צלעות. (הוכח!).

צירוף שני דפי A4 נותן דף A3. קיפול דף A4 נותן שני דפי A5 .

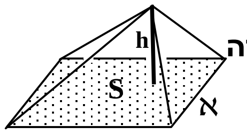
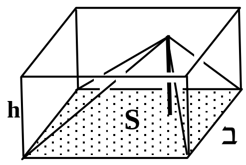
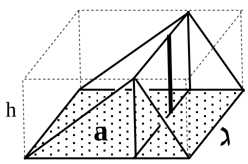
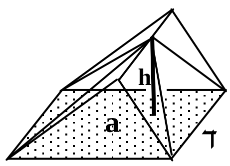
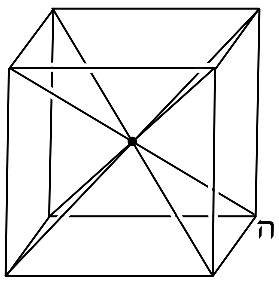
הערה: גם $\sqrt{2}$, כמו φ, אינו שווה לשום מנה של שני מספרים שלמים.

ד. לפניכם ציור של מחומש משוכלל ואלכסוניו.

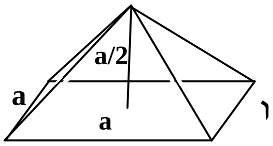
כמה משולשי-זהב יש בציור זה?



נפח פירמידה מיוחדת (2 שעות)

הנושאים	**הבהרות ודוגמאות**
נפח פירמידה **א. מבוא** • **נפח הפירמידה קטן מ - $S\cdot h$** **(S - שטח הבסיס,** **h - גובה הפירמידה)** • **נפח הפירמידה קטן מ - $\frac{S\cdot h}{2}$**	 **למען הפשטות נתבונן תחילה בפירמידה שבסיסה מלבן ששטחו S וגובהה h, אך קדקוד הראש שלה לא עומד דווקא מול אמצע הבסיס (ראו ציור א).**  **בציור ב מצוירת הפירמידה שלנו בתוך תיבה שנפחה Sh ולכן נפח הפירמידה קטן מ- $S\cdot h$.**  **נחלק את התיבה לשתי תיבות על ידי מלבן מקביל לפאות ועובר דרך הגובה (ראו ציור ג).**  **נסלק מחצית של כל תיבה. וכך התקבלה מנסרה שנפחה מחצית נפח התיבה. הפירמידה היא חלק ממנסרה זאת ומכאן נובע שנפח הפירמידה קטן גם מ- $\frac{S\cdot h}{2}$.**
ב. נפח הפירמידה הוא: $\frac{S\cdot h}{3}$	**נוכיח את הנוסחה לחישוב נפח הפירמידה לפירמידות מסוג פשוט.** **נתבונן בקובייה שמקצועה יסומן ב- a, נעביר בה אלכסונים ובעזרת המשולשים שהם יוצרים נחלק אותה לשש פירמידות חופפות (ציור ה).** 

הערה: ראו בסוף הסעיף הוכחה לכך שאלכסוני הקובייה נפגשים בנקודה אחת ולכן נוצרות שש פירמידות חופפות. אחת מהן מצוירת בציור ה



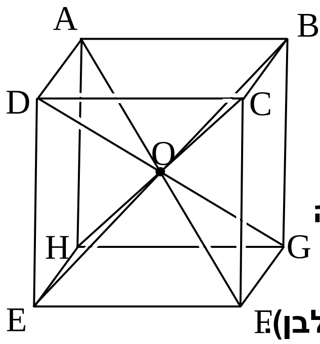
נפחה הוא ששית נפח הקובייה, כלומר $\frac{a^3}{6}$.

הנמקה: בפירמידה זאת $S=a^2$ ו- $h=\frac{a}{2}$ נקבל:

$$\frac{a^3}{6} = \frac{S\cdot h}{3}.$$

הערה: אפשר להוכיח את הנוסחה גם לכל פירמידה אחרת, ונשתמש בזה לחישובים, אך ההוכחה המלאה חורגת ממסגרתנו הנוכחית.

נפח כל פירמידה הוא $\frac{S\cdot h}{3}$

משפט:	הוכחה:
משפט: **אלכסוני הקובייה נפגשים בנקודה אחת.**	 **הוכחה:** **נתבונן במרובע ADFG.** **AD = FG צלעות הקובייה** **DF = FG אלכסוני פיאות הקובייה** **לכן המרובע ADFG הוא מקבילית.** **(ניתן גם להוכיח שמרובע זה הוא מלבן)** **DO =OG** **AO = OF במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה.** **נתבונן במרובע DCGH.** **בדרך דומה נוכיח שגם מרובע זה הוא מקבילית.** **לכן אלכסוניו DG ו- CH חוצים זה את זה.** **הוכחנו שנקודת האמצע של DG היא O ולכן היא גם נקודת האמצע של CH.** **באופן דומה נוכיח שגם האלכסון EB עובר בנקודה O.** **כלומר כל האלכסונים של הקובייה נפגשים בנקודה אחת.**