

נושאים למתקדמים – דוגמאות

המחשבון ה"מקולקל" (6 שעות)


מטרות

- חזרה על תכונות פעולות החשבון
- שימוש לא פורמאלי בשיקולים אלגבריים
- העמקה בנושאים הנלמדים בכיתה
- טיפוח מיומנויות הכללה והנמקה
- טיפוח חשיבה יצירתית.

הנושאים	הבהרות ודוגמאות
<p>א. יצירת מספרים ממספרים אחרים.</p> <p>ב. חישוב סכום ללא מקש החיבור</p> <p>ג. חישוב הפרש ללא מקש החיסור</p> <p>ד. חישוב מכפלה וללא מקשי החיבור והכפל.</p>	<p>מציגים מצב דמיוני, בו מציבים בפני התלמיד מחשבון שחלק מהמקשים שלו אינם פועלים. על התלמידים לעקוף את המגבלות הנובעות מכך, ולמצוא דרכים לקבל על צג המחשבון ה"מקולקל" מספרים מסוימים, או לחשב תוצאות של פעולות מסוימות. ניתן למצוא באינטרנט יישומונים (applets) המדמים מחשבונים בעלי מקשים בלתי תקינים (לא פעילים) לפי בחירת המשתמש.</p> <p>דוגמאות:</p> <p>א. נתון מחשבון בו המקש המספרי התקין היחיד הוא $\frac{2}{3}$ ומקשי הפעולות היחידות התקינות הן החיבור וההעלאה בריבוע. קבלו על צג המחשבון את המספרים 24 ו-40.</p> <p>ב. נתון מחשבון בו המקש $\frac{+}{-}$ אינו תקין. חשבו בעזרתו את הסכום $6581 + 7659$</p> <p>פתרון:</p> <p>ניתן להפעיל שיקולים אלגבריים לא פורמאליים, ולחשוב על האפשרות להכפיל פי שניים את המספר הראשון (מקש הכפל פעיל) ולהוריד ממנו את הפרש בין שני המספרים (גם מקש החיסור פעיל) – בעצם התלמיד משתמש בתבנית $2a - (a - b)$, אך בונה אותה מתוך שיקולים מתמטיים כללים – ולא מתוך שימוש בחוקים לפישוט ביטויים אלגבריים, אשר טרם נלמדו. [בשלים מתקדמים יותר של לימודי האלגברה, התלמידים יוכלו לבצע פעולות המתאימות לתבניות אחרות – כגון,</p> $\left[\frac{a^2 - b^2}{a - b} \right]$ <p>ג. נתון מחשבון בו מקשי פעולות החיבור והכפל אינם תקינים. חשבו בעזרתו את המכפלה 312×45 [כאן ניתן להשתמש בתבנית $a \div (1 \div b)$</p>

מטרות

- א. חקירה לעומק של קבוצות מספרים ופעולות שנלמדו
- ב. הסתכלות פורמאלית על מבנים מתמטיים
- ג. טיפוח חשיבה מתמטית מופשטת
- ד. טיפוח מיומנויות הכללה והנמקה
- ה. הכרת פעולות בינאריות חדשות.

הנושאים	הבהרות ודוגמאות
א. חקר פעולות	<p>הגדרת פעולות שונות (למשל, הממוצע של שני מספרים, הסכום של המכפלה והסכום של שני מספרים, חיבור וקטורים בייצוג גראפי) וחקירתן:</p> <ul style="list-style-type: none">• מציאת תוצאת פעולה בין שני איברים נתונים• בניית לוח פעולה• פתרון "משוואה" (מציאת איבר על סמך איבר נתון ותוצאת פעולה)• קיום תכונות (למשל, סגירות, חלופיות, קיבוציות, איבר ניטרלי ואיבר הופכי).
ב. טרנספורמציות גאומטריות כאיברי קבוצה תחת הפעולה של הרכבה	<p>הסתכלות על טרנספורמציות כאובייקטים, ועל הרכבת פונקציות כפעולה בין אובייקטים אלה.</p> <p>דוגמה:</p> <p>בנו לוח לפעולת ההרכבה בין טרנספורמציות המעבירות מלבן על עצמו: שני סיבובים סביב מרכז המלבן ב-180° וב-360° ושני שיקופים לגבי ציר הסימטרייה האופקי והציר האנכי של המלבן.</p> <p>פעולת ההרכבה בין שתי טרנספורמציות מתבצעת על ידי הפעלת שתי הטרנספורמציות בזו אחר זו על המלבן, החל ממצבו המקורי.</p> <p>למעקב אחר התוצאות ציירו שני דגלים חופפים ובאותה תנוחה, משני צדדיו של נייר מלבני.</p> <p>בדקו קיום תכונות הסגירות, האיבר הניטרלי והאיבר ההופכי של הפעולה לגבי קבוצת הטרנספורמציות האלה.</p> 

<ul style="list-style-type: none"> • הגדרת חבורה • קביעת קיום תנאי חבורה לגבי קבוצות ופעולות מוכרות מלימודים קודמים או לגבי קבוצות ופעולות שנחקרו במסגרת יחידה זאת. 	<p>ג. מושג החבורה</p>
<ul style="list-style-type: none"> • הכרת תופעות המתנהגות לפי חשבון מודולארי (למשל, סיבוב במעגל המחולק למספר חלוקות, שעות היממה, ימי השבוע). דוגמה: היום יום ג' 10.6.08. - באיזה יום בשבוע יחול 10.08.08? - באיזה יום בשבוע יחול 10.6.16? • הכרת הסימון $a \pmod{b}$. • חישובים מודולאריים ובניית לוחות פעולה של כפל או חיבור לפי מודולו נתון. • פתרון משוואות מודולאריות. דוגמאות: $3 + x = 4 \pmod{5}$ $2x = 2 \pmod{4}$ $x^2 = 1 \pmod{5}$ 	<p>ד. חשבון מודולארי</p>

הצפנה (קריפטוגרפיה) (10 שעות)

מטרות

- א. הכרות עם שיטות הצפנה שונות לאורך ההיסטוריה
- ב. שימוש בנושאים מתמטיים (שכיחות יחסית, אריתמטיקה מודולארית, הסתברות) לצורך פענוח
- ג. הדגמה של שימוש במתמטיקה בנושא המעורר עניין
- ד. שימוש בנושא החשבון המודולארי
- ה. הכרות עם נושא מתמטי שימושי, העומד בחזית המחקר המדעי, באמצעות דוגמאות פשוטות ונגישות לידע של תלמידי חטיבת הביניים.

הבהרות ודוגמאות	הנושאים
<p>• מושגי יסוד בהצפנה (טקסט מקור, טקסט מוצפן, אלגוריתם הצפנה, פענוח)</p> <p>• שלוש קבוצות עיקריות של דרכי הצפנה - הסתרת מידע (דוגמה א); העברה (דוגמה ב) והחלפה (דוגמה ג).</p> <p>דוגמאות:</p> <p>א. לפניכם טקסט מוצפן.</p> <p>א-ב-ני-בי או-בו-ה-ב-ב או-בו-ת-ב-ך</p> <p>התוכלו לגלות את הטקסט המקורי? במילים אחרות, התוכלו לפענח את הטקסט המוצפן?</p> <p>ב. לפניכם טקסט מוצפן.</p> <p>נטתיפ צקימי פסבוש יטהנו נדבשר ארטלו תכוחת הכרל.</p> <p>במקרה זה, ההודעה המוצפנת נרשמה בטורים מלמעלה למטה ומימין לשמאל, ונשלחה כאשר היא נרשמת לפי שורות, בקבוצות של חמש אותיות.</p> <p>ג. קוד מורס.</p>	<p>א. מבוא:</p> <p>הצפנה מהי ולשם מה? מה כרוך בשבירה מוצלחת של שיטת הצפנה?</p>
<p>• הצפנת קיסר (הזזה ב 3 מקומות) כדוגמה להצפנה בשיטת הזזה קבועה</p> <p>• חיבור מודולו 22, כפל מודולו 22, ושימוש בשתי הפעולות (חיבור וכפל מודולו 22) להצפנה ופענוח – יתרונות וחסרונות.</p>	<p>ב. הצפנה בעזרת הזזה קבועה.</p>

<ul style="list-style-type: none"> • הרכבת פונקציות – כפל מודולו 22 ואחריו חיבור מודולו 22 (ראו דוגמה). • בחינת מספר האפשרויות. • ניתוח שיטות הפענוח. <p>דוגמה:</p> <p>הצפנת אפינית [7, 11].</p> <p>טקסט מקור: צפנת פענוח</p> <p>הצפנה לפי כפל מודולו 7: עטית טביל</p> <p>הצפנה לפי חיבור מודולו 11: הרשכ רמשא</p> <p>כלומר, הטקסט המוצפן המתקבל בסוף התהליך הוא בהרשכ רמשא.</p>	<p>ג. הצפנה בעזרת טרנספורמציות אפיניות (affine transformations)</p>
<ul style="list-style-type: none"> • מהי שכיחות יחסית? כיצד ניתן לחשב שכיחות יחסית? • הסבר והדגמת ההצפנה, חישוב מורכבות הפענוח. • פענוח תוך שימוש בטבלת שכיחויות יחסיות של האותיות בשפה. 	<p>ד. הצפנה ופענוח הצפנה בעזרת מילת מפתח</p>
<ul style="list-style-type: none"> • חישוב ההסתברות להופעת כל אות בשפה בטקסט בעל משמעות, חישוב ההסתברות להופעת זוג אותיות זהות במקומות סמוכים בטקסט בעל משמעות, הפעלת החישוב על טקסט מוצפן לצורך גילוי אורך מפתח ההצפנה. • הסבר והדגמת ההצפנה, חישוב מורכבות הפענוח. • פענוח הצפנה בשיטת ויגנר. 	<p>ה. הצפנת ופענוח לפי שיטת ויגנר</p>
<ul style="list-style-type: none"> • הסבר של עקרונות שיטת ההצפנה הנמצאת כיום בשימוש במחשבים בכל העולם, תוך השענות על דוגמה. 	<p>ו. הצפנה בשיטת RSA – הצצה</p>