תכנית הלימודים לכיתה ז

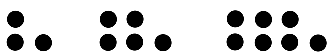
לתלמידים מתקדמים ומתעניינים כוללת התכנית תוספת של תכנים משני סוגים:

א. פרקים עצמאיים בהיקף של 4 עד 10 שעות. דוגמאות לפרקים כאלה מופיעות בסוף התכנית.

ב. פרקונים קצרים בהיקף של כשיעור. דוגמאות לפרקונים כאלה מופיעות (עם רקע) בצמוד לנושאים בתכנית כהרחבה והעמקה.

תחום אלגברי	**תחום מספרי**	**תחום גאומטרי**
1. חוקיות, משתנים, ביטויים אלגבריים (12 שעות)	**1. חוקים של פעולות החשבון, סדר פעולות החשבון וחזקות** (10 שעות)	**1. מלבן, שטח מלבן, תיבה, נפח תיבה** (10 שעות)

תחום אלגברי: 1. חוקיות, משתנים, ביטויים אלגבריים
ראה נספח על **מערכת המושגים** במבוא

נושאי הלימוד	**הבהרות ודוגמאות**
המשתנה	**משתנה: משתנה הוא אות שהוראתה המספרית (= הערך שלה) ניתנת לקביעה ולשינוי על פי הצורך.** **אין לפרט בשלב זה את השימושים השונים באות, שהם: מספר מסוים (נעלם), קבוע, אמצעי לניסוח טענה כללית, פרמטר וכו'.** **מוצע להכניס את מושג המשתנה דרך דוגמה שבה רואים את התועלת שבמשתנה.** **דוגמה:** לפניכם סדרה של קבוצות של עיגולים המתקדמת משמאל לימין:  כמה נקודות יש בכל איבר בסדרה? הציעו המשך לסדרה: כתבו את שלושת האברים הבאים. אחרי שכולם הסכימו שההמשכה הפשוטה ביותר נותנת את הסדרה 3 , 5 , 7 , 9 , 11 , 13 נשאלה השאלה מהו האיבר התשיעי שבסדרה. אמר רן: אין בעיה, נמשיך ונקבל את 15, ואחריו 17 והאיבר התשיעי יהיה 19. אמרה מרים: לי יש דרך אחרת. שלושת האיברים הראשונים הם, משמאל לימין, $2\cdot1+1$, $2\cdot2+1$, $2\cdot3+1$ אני משערת שהאיבר התשיעי יהיה $2\cdot9+1$ וזה 19, כמו שקיבל רן. אמר דוד: בשיטה של מרים אני יכול למצוא בקלות איזה מספר יעמוד, למשל, במקום ה- 58 . מספר זה צריך להיות $2\cdot58+1$ וזה שווה ל- 116+1 ,

כלומר ל- 117 .
אמרה דינה: בואו נשתמש באות n בתור סימן שיכול לסמן כל פעם מספר אחר, ואז נוכל לכתוב כלל: בַּמָּקוֹם ה- n של הסדרה עומד המספר $2 \cdot n + 1$.
דברי מרים מתאימים לכלל שלי עם n = 9 . דברי דוד מתאימים לכלל שלי עם n = 58 .

בהמשך ניתן לתרגל גם מעבר מדוגמאות מספריות אל הכללה בעזרת משתנה בלי לציין מטרה לפעולה זאת.

דוגמה:

א. במדף אחד יש 20 ספרים, במדף אחר יש 4 ספרים יותר. כמה ספרים יש במדף האחר?

ב. במדף אחד יש 35 ספרים, במדף אחר יש 4 ספרים יותר. כמה ספרים יש במדף האחר?

ג. במדף אחד יש a ספרים, במדף אחר יש 4 ספרים יותר. כתבו ביטוי שיבטא את מספר הספרים במדף האחר.

והרי דוגמאות נוספות (כולן משתמשות בסדרות. אין מניעה להדגים רעיונות בעזרת סדרות גם כשהנושא איננו "סדרות")

ד. נתבונן בסדרה ... ,2, 4, 6, 8. נכתוב את מספרי המקומות בסדרה ומתחתיהם את המספרים המתאימים.

מקום	4	3	2	1
איבר הסדרה	8	6	4	2

איזה מספר נמצא במקום n? המספר 2·n. איזה מספר נמצא במקום 13? 2·13 שהוא 26.
מהם האיברים הראשונים של הסדרה שבמקום ה-n שלה נמצא המספר 3·n-1?

מקום	n		4	3	2	1
איבר	3·n-1		11	8	5	2

האיברים הראשונים של הסדרה שבמקום ה-n שלה נמצא המספר $\frac{2}{3}n$

הם ... $\frac{2}{3}$, 2, 2, $1\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$.

לביטוי האלגברי האומר מהו איבר הסדרה במקום ה-n אנו קוראים **נוסחת הסדרה.**

שאלות: כתבו את ארבעת האיברים הראשונים ואת האיבר ה- 20 של הסדרות

	הנתונות על ידי הנוסחאות הבאות: $\frac{1}{2}n$, $\frac{3}{4}n$, $\frac{2}{3}n+\frac{1}{4}$. כתבו את הנוסחאות של הסדרות הבאות 3, 5, 7, ... ו- 5, 8, 11, ... לתלמידים מתקדמים: כתבו את הנוסחאות של הסדרות הבאות: $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...$, $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},...$, $\frac{2}{3},\frac{4}{4},\frac{6}{5},\frac{8}{6},...$. **למורה**: כאשר נתונים בתרגיל מספר איברים ראשונים בסדרה אז יש, בדרך כלל, נוסחה פשוטה ביותר לסדרה, כפי שראינו לעיל. למשל, לסדרה 2,4,6, ... הנוסחה הפשוטה ביותר היא 2·n, ולפי נוסחה זאת האיברים הבאים בסדרה הם 8 ו- 10. גם הנוסחה (n-1)(n-2)(n-3)+2n נותנת סדרה ששלושת איבריה הראשונים הם 2,4,6 , אבל שני האיברים הבאים הם 14,34.
• **תיאור של מצבים ושל חוקיות על ידי ביטויים אלגבריים פשוטים**	**דוגמה:** א. מה היקפו של משולש שווה צלעות שאורך צלעו 5 ס"מ? 7.5 ס"מ? ב. רשמו ביטוי להיקף של משולש שווה צלעות שאורך צלעו a ס"מ. **בשלביו הראשונים של הלימוד של כתיבת ביטויים אלגבריים יש לכתוב את הכפל עם סימן הנקודה, כמו ב- $2\cdot x$, ולא כמו ב- 2x.**
• **ביטויים שווי ערך וכינוס אברים דומים**	**ביטויים שווי ערך: ביטויים שמקבלים ערכים שווים בשביל ערכים שווים של המשתנה.** **התלמידים יכירו את המושג ביטויים שווי ערך וילמדו לזהות ביטויים שווי ערך (כולל שברים), למשל:** $a+a=2a$, $a+5-5=a$, $2a+5+3a+4=5a+9$ $\frac{2}{5}m=\frac{2m}{5}$, $2a+\frac{a}{2}=2a+\frac{1}{2}a=2\frac{1}{2}a$, **וכדומה.** **בשלב זה, לא נבקש מהתלמידים הנמקות על סמך חוקים כגון חוק החילוף אלא על סמך הבנה ישירה של המשמעות או על סמך דוגמאות. למשל:**

- **אם מחברים ומחסרים אותו מספר לא משנים כלום בערך הביטוי, לכן:** $a+5-5=a$
- $a+a=2a$
- **כפל של שבר במספר נעשה על ידי כפל המונה במספר וחילוק המכפלה במכנה כי למשל:**

$$\frac{2}{5}\cdot 3=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=\frac{2\cdot 3}{5}$$ **ובאופן כללי:** $$\frac{2}{5}m=\frac{2m}{5}$$

כאן גם מקום לחזק את הידע של התלמידים על סימנים מתמטיים. למשל:

$$\frac{a+3}{2}=(a+3):2$$

- **הצבת מספרים בביטויים**

הצבה של מספרים בביטויים וחישוב של ערכי הביטויים.

ההצבות יהיו הן בדוגמאות מכאניות כמו בדוגמה 1 להלן והן בהקשרים משמעותיים כגון 2 או 3.

הערה: בביטויים נציב מספרים טבעיים, שברים פשוטים, מספרים עשרוניים.

דוגמאות:

1. א. הציבו בביטוי 3a – 21, במקום a, את הערכים: 5.3, 5.7, $5\frac{1}{4}$

   ב. סדרו את המספרים המתקבלים לפי הגודל.

2. הנוסחה למעבר מטמפרטורה בפרנהייט לטמפרטורה בצלסיוס היא:

   $C=\frac{5}{9}(F-32)$ כאשר הטמפרטורה בפרנהייט היא F מעלות והטמפרטורה במעלות צלסיוס היא C .

   א. אם הטמפרטורה היא 100 מעלות פרנהייט מהי הטמפרטורה במעלות צלסיוס?

   ב. מה קורה למים בטמפרטורה של 212 מעלות פרנהייט?
   רמז: מצאו את הטמפרטורה המקבילה במעלות צלסיוס?

   ג. מה קורה למים בטמפרטורה של 32 מעלות פרנהייט?

3. מחיר קילוגרם עגבניות הוא a ₪ ומחיר קילוגרם מלפפונים הוא b ₪.

   א. רינה רוצה לקנות 3 קילוגרם עגבניות ו-2 קילוגרם מלפפונים. רישמו ביטוי למחיר של הירקות.

ב. בחנות של ירקוני מחיר העגבניות הוא 6.5 ₪ לקילוגרם ומחיר המלפפונים הוא 6 ₪ לקילוגרם. כמה תשלם רינה אם תקנה את הירקות האלה בחנות של ירקוני?

ג. בשוק מחיר העגבניות נמוך ב- 2 ₪ לקילוגרם ממחירם בחנות ומחיר המלפפונים לקילוגרם הוא $\frac{3}{4}$ ממחירם בחנות. כמה תשלם רינה אם תקנה את הירקות האלה בשוק?

תחום מספרי:1. חוקים של פעולות החשבון, סדר פעולות החשבון וחזקות

ראה פרק **התחום המספרי** במבוא

נושאי הלימוד	הבהרות ודוגמאות
כללי שינוי הסדר של החיבור והכפל	**בסעיף זה, הדגש הוא על הדגמת החוקים במצבים מוכרים ושימוש בהם לפתרון נוח של תרגילים.** **במסגרת הטיפול בחוקי פעולות החשבון, יש לבסס את סדר פעולות החשבון. אין צורך בתרגילים ארוכים ואין צורך בריבוי סוגריים.** **כלל שינוי הסדר של החיבור: בביטוי שהוא סכום של מספר מחוברים, כגון** $2+\frac{3}{4}$ **או** $3+\frac{2}{5}+4$ **שינוי סדר המחוברים אינו משנה את הסכום.** **כך** $\frac{3}{4}+2=2+\frac{3}{4}$ **וכן** $3+\frac{2}{5}+4=4+3+\frac{2}{5}$. **המקרה הפשוט ביותר הוא שינוי הסדר של שני מחוברים, שבאמצעות נוסחה כותבים אותו: לכל a ו- b,** $a + b = b + a$. **כלל זה נקרא חוק החילוף.** **בהמשך נראה דוגמאות יותר כלליות של כלל שינוי הסדר של החיבור.** **כלל שינוי הסדר של הכפל: גם בביטוי שהוא מכפלה של מספר כופלים שינוי סדר הכופלים אינו משנה את המכפלה.** **כך** $2\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\cdot 2$ **ו-** $3\cdot\frac{3}{5}\cdot 6=\frac{3}{5}\cdot 6\cdot 3$. **המקרה הפשוט ביותר הוא שינוי הסדר של שני מחוברים, שבאמצעות נוסחה כותבים אותו: לכל a ו-b,** $a\cdot b = b\cdot a$. **בחיסור ובחילוק אין להפוך את סדרם של שני המספרים.** **הערה: כללי שינוי הסדר מאפשרים פתרון תרגילים בדרך נוחה. אין צורך לעסוק בניתוח הפתרון או לדרוש הנמקה.**

דוגמאות:

1. חישוב נוח על פי כלל שינוי הסדר בחיבור:

2.4 + 1.7 + 7.6 = 2.4 + 7.6 + 1.7 = 10 +1.7 = 11.7

וגם 5.4 +1.7 - 3.4 = 5.4 – 3.4 +1.7 = 2 +1.7 = 3.7

לתלמידים מתקדמים: $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

2. חישוב נוח על פי כלל שינוי הסדר בכפל:

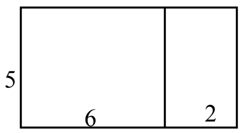
$$\frac{1}{2}\cdot 13\cdot 8\cdot=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 13=4\cdot 13=52$$

חוקי הפילוג

חוקי הפילוג של הכפל מעל החיבור או מעל החיסור

דוגמאות:

אפשר להדגים את חוקי הפילוג על ידי:



1. חישוב בשני אופנים של שטח המלבן המסורטט:

דרך א: $5\cdot 6+5\cdot 2$, דרך ב: $5\cdot(6+2)$

2. חישוב בשני אופנים של מספר העצים בפרדס:

בפרדס יש 17 שורות של עצים. בכל שורה יש 18 עצים, מהם 2 עצי ברוש והשאר עצי לימון. כמה עצי לימון בפרדס?

דרך א: $17\cdot 18-17\cdot 2$

דרך ב: $17\cdot(18-2)$

ניסוח החוק בביטויים אלגבריים:

לכל a , לכל b ולכל c מתקיים:

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$
$$a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c$$

- שימושים בחוקי הפילוג

דוגמאות:

1. פתרו בדרך נוחה: $13\cdot 17=(10+3)\cdot 17=\ldots$

2. אמא קנתה ספרים לשלושת ילדיה, ספר לכל ילד. מחיר הספר לכל ילד 57 ₪. שכנתה ביקשה ממנה לקנות שבעה ספרים נוספים באותו המחיר. כמה עלו כל הספרים?

פתרון: $3\cdot 57+7\cdot 57=(3+7)\cdot 57=570$

שימו לב: השימוש בחוק הפילוג נעשה כאן "בכיוון ההפוך" על מנת להקל על החישוב.

חוק הפילוג מתקיים גם כאשר בסוגריים יש חיבור וחיסור עם יותר משני מספרים. למשל,

$$5\cdot(7-3+5)=5\cdot 7-5\cdot 3+5\cdot 5=35-15+25=45$$

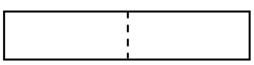
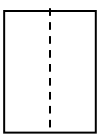
חיבור של סכום והפרש	**$a+b+(c+d+e) = a+b+c+d+e$** **וגם $a-b+(c-d+e) = a-b+c-d+e$.** **להדגים זאת על ידי דוגמאות מספריות ולא ללמד את הנוסחאות.**
חיסור של סכום: $a - (b + c) = a - b - c$	**הנמקה לחוק** $a - (b + c) = a - b - c$ **על ידי דוגמה מסבירה.** **דוגמה:** היו לי a ₪. קניתי שני מוצרים, האחד במחיר b ₪ והאחר במחיר c ₪. כמה כסף נשאר לי? אפשר לחשב את סכום הכסף שנשאר לי בשתי דרכים: א. למצוא כמה כסף הוצאתי בסך הכל, $(b + c)$ ולחסר אותו מ- a, כלומר: $a - (b + c)$ ב. לחסר מ- a תחילה את b ואחר כך את c, כלומר: $a - b - c$ **מסקנה:** $a - (b + c) = a - c - b$
חיסור של הפרש: $a - (b - c) = a - b + c$	**הנמקה לחוק** $a - (b - c) = a - b + c$ **על ידי דוגמה מסבירה.** **דוגמה:** היו לי a שקלים. כשקניתי מוצר מסוים שילמתי b שקלים וקיבלתי עודף c שקלים. כמה כסף יש לי עכשיו? נחשב בשתי דרכים: א. בסך הכל הוצאתי $(b - c)$ שקלים לכן נשארו לי $a - (b - c)$ שקלים. ב. בשלב הביניים, אחרי התשלום ולפני קבלת העודף. היו בידי $a - b$ שקלים, אחרי קבלת העודף היו לי $a - b + c$ שקלים. **מסקנה:** $a - (b - c) = a - b + c$
חילוק במכפלה: $a:(b\cdot c)=a:b:c$	• **הנמקה של החוק** $a:(b\cdot c)=a:b:c$ **:** **כאשר המחלק נכפל ב- c , המנה מתחלקת ב- c.** **דוגמה:** $a : (2 \times 5)$ קטן פי 5 מ- $a : 2$ ולכן: $a : (2 \times 5) = a : 2 : 5$ **הנמקה לאותו כלל על ידי דוגמה מסבירה.** **דוגמה:** לסבא יש שני בנים ולכל אחד מהם 3 בנות. סבא רוצה לחלק 300 ₪ דמי חנוכה שווה בשווה בין כל הנכדות. הוא יכול לחלק את הכסף בשתי דרכים. **א.** לסבא יש 2×3 נכדות ולכן כל אחת תקבל: $300:(3\cdot2)$

	ב. סבא יחלק את הכסף לשני הבנים, 300:2, וכל בן יחלק את הכסף לבנותיו וכל נכדה תקבל: 300:2:3 ₪. **מסקנה:** $a:(b\cdot c)=a:c:b$ **הערה:** יש להציג את החילוק גם על ידי קו שבר. לדוגמה: $a:(b\cdot c)=\frac{a}{b\cdot c}$
חילוק במנה: $a:(b:c)=a:b\cdot c$	• **הנמקה של החוק** $a:(b:c)=a:b\cdot c$ **:** **כאשר המחלק מתחלק ב- c , המנה נכפלת ב- c.** **דוגמה:** a : (12:3) גדול פי 3 מ- a :12 ולכן: a : (12 :3) = a :12 · 3 **הנמקה לאותו כלל על ידי דוגמה מסבירה.** **דוגמה:** חילקנו a ספרים ל- 12 תלמידים שמכינים עבודה בשלשות. כמה ספרים תקבל כל שלשת תלמידים? אפשר לפתור זאת בשתי דרכים: א. מספר השלשות הוא: 12:3 וכל שלשה תקבל: a:(12:3) ספרים. ב. כל תלמיד יקבל a :12 ספרים ולכן כל שלשה של תלמידים תקבל: a:12·3 ספרים. **מסקנה:** $a:(b:c)=a:b\cdot c$ • עיסוק בתרגילים שבהם כדאי ליישם את החוקים הנוספים. **דוגמאות:** 1. 573 – 98 = 573 – 100 + 2 2. $73:5=73:10\cdot 2=7.3\cdot 2=14.6$ **הערה:** עיקר השימוש בחוקים ייעשה בפתרון משוואות.
חזקות עם מעריך טבעי **שורש ריבועי**	**הדגמת הכתיב המקוצר של הכפל בצורת חזקה על ידי דוגמאות.** **למשל: את** $4\cdot 4\cdot 4$ **נסמן** 4^3. **יישום של חזקות, למשל שימוש בחזקות לכתיבת שטח ריבוע ונפח קובייה ושטח פניה.** **הכוונה רק לשימוש בחזקות בהקשר מציאותי ולא לפיתוח נושא החזקות בהרחבה. נחזור לנושא בכיתה ח'.** תלמידים מתקדמים יכתבו מספרים כמכפלה של חזקות של מספרים ראשוניים כמו ב- $72=2^3\cdot 3^2$. **שורש ריבועי של מספר נתון הוא מספר חיובי שהריבוע שלו שווה**

	למספר הנתון: $\sqrt{25}=5$ **מדובר רק על שורשים שהם מספרים טבעיים ואולי גם שברים קלים כגון** $\frac{1}{3}$ **או** $\frac{3}{2}$**.** **הערה: מבלי ללמד זאת מבחינה פורמלית, אפשר לבקש למצוא גם את צלע הקובייה על פי נפחה. הפתרון יכול להיות בדרך של נסייה וטעייה.**

תחום גאומטרי: 1. מלבן, שטח מלבן, תיבה, נפח תיבה

במבוא, בפרק על ה**גאומטרייה** יש התייחסות למידת הפירוט הנדרשת

נושאי הלימוד	**הבהרות ודוגמאות**
מלבן **הגדרה:** **מרובע בעל ארבע זוויות ישרות הוא מלבן.** • **צורות חופפות** **הגדרה:** **צורות חופפות הן צורות שאפשר להניח אחת מהן על האחרת כך שתכסה אותה בדיוק. (ניתן לסובב את הצורות וגם להפוך אותן)** • **ניצבות** **הגדרה:** **ישר ניצב (מאונך) לישר אחר אם**	• **אם במרובע שלוש זוויות ישרות אז גם הזווית הרביעית ישרה, כלומר המרובע הוא מלבן.** • **במלבן, צלעות הנגדיות שוות זו לזו.** **אימות הטענות על ידי מדידות ועל ידי קיפולי נייר.** **במהלך לימוד המלבן יעלו גם המושגים: חפיפה, ניצבות ומקבילות.** • **הצלעות והזוויות של שני מצולעים חופפים שוות זו לזו, על פי הסדר.** **צורות שוות שטח אינן בהכרח חופפות.**  

<table>
<tr>
<td>

הוא יוצר איתו זוויות ישרות.

מושגים:

אנך לישר, אנך אמצעי לקטע

- **בניות**

</td>
<td>

ביסוס מושג הניצבות על ידי בניות:

- בניית אנכים לישר מנקודה עליו או מנקודה חיצונית ניתן לבצע בעזרת משולש סרטוט, על ידי קיפול וכו'.

- בניית אנכים גם לישרים שאינם מקבילים לאחד משולי הדף.

- העתקת קטע שאורכו נתון בעזרת סרגל או במחוגה, או בקיפולי נייר.

- בניית מלבן על פי שתיים מצלעותיו בעזרת משולש סרטוט, סרגל עם שנתות, קיפולים (כהדגמה לחפיפת מלבנים לפי שתי צלעות סמוכות ולכך שבנייה כזו אכן מובילה למלבן).

</td>
</tr>
<tr>
<td>

- **שני מלבנים שיש להם שתי צלעות סמוכות שוות אחת לאחת הם מלבנים חופפים.**
- **מקבילות**

הגדרה:

שני ישרים הם מקבילים אם הם ניצבים לאותו ישר.

שני קטעים הם מקבילים אם הם נמצאים על ישרים מקבילים.

</td>
<td>

הצדקה על ידי האפשרות להעתיק מלבן אחד על חברו.

הערה: שימו לב לשינוי בהגדרת המקבילות. זו הגדרה קונסטרוקטיבית שאינה על דרך השלילה, ומתאימה יותר לגישתנו המקדימה את העיסוק בשטחים.

המטרה העיקרית של הכנסת המקבילות כאן היא היישום של תכונות המלבן לקבלת שתי הטענות שבהמשך.

מסקנה: צלעות נגדיות במלבן מקבילות (כלומר, נמצאות על ישרים מקבילים)

הערה: שימו לב שמהגדרת המקבילות שלמעלה נובע שישרים מתלכדים הם מקבילים (כל ישר מקביל לעצמו).

</td>
</tr>
<tr>
<td>

- **טענה:**

ישר המאונך לאחד משני ישרים מקבילים מאונך גם לשני.

- **מרחק**

הגדרה:

</td>
<td>

הנמקה: אם במרובע שלוש זוויות ישרות אז גם הזווית הרביעית ישרה.

</td>
</tr>
</table>

מרחק בין שני ישרים מקבילים שונים הוא אורך קטע המאונך לשניהם. **טענה:** **המרחק בין ישרים מקבילים קבוע.** • **טענה:** **שני ישרים מקבילים שונים אינם חותכים זה את זה (כלומר: ישרים מקבילים מתלכדים או שהם אינם נפגשים).** • **ריבוע** **הגדרה:** **מלבן שכל צלעותיו שוות זו לזו הוא ריבוע. כלומר: מרובע בעל ארבע זוויות ישרות וארבע צלעות שוות זו לזו הוא ריבוע.**	**הנמקה: כל שני אנכים משותפים לשני ישרים מקבילים והקטעים שהם מקצים על הישרים המקבילים יוצרים מלבן. במלבן הצלעות הנגדיות שוות ולכן האנכים שווים זה לזה.** **הנמקה: כיוון שהמרחק הקבוע שונה מ- 0 הרי שהישרים אינם נפגשים.** **הערה: הכלל האומר - שאם במרובע שלוש זוויות ישרות אז גם הזווית הרביעית ישרה - שקול לאכסיומת המקבילים הקלסית.** **יש לעסוק בכך שריבוע הוא מלבן מיוחד. (תלמידים מתקשים לראות בריבוע גם מלבן.)** **בהמשך, נראה שריבוע הוא גם מעוין, וכל אלה הם מקביליות. חשוב שהתלמידים יתחילו להבין את יחסי ההכלה.** **סימון נקודות, קטעים וזוויות באותיות** **- סימון זוויות ייעשה כך: ∢ABC, ∢B_3, ∢B או $\hat{1}$ (עם התייחסות לסרטוט)** **מידת הפירוט - על פי הצורך .** **ניתן לשלב בדיונים על מלבן והקבלה.**
• **שטח מלבן**	**נוסחת שטח המלבן תתקבל תחילה על ידי ריצוף בריבועי יחידה במקרה של צלעות שהן כפולות שלמות של ס"מ (או של יחידה קבועה אחת אחרת).** **בשלב שני יורחב השימוש בנוסחה למקרה של כפולות רציונאליות של יחידת האורך.** **דוגמה:** 1.מה שטחו של מלבן שצלעותיו $\frac{1}{3}x\frac{1}{7}$?

במלבן ששטחו 1 יחידת שטח יש 3x7 מלבנים כאלה ולכן שטח כל מלבן שצלעותיו $\frac{1}{7}$ ו- $\frac{1}{3}$ הוא $\frac{1}{3\times 7}$. שימו לב: $\frac{1}{3}\times\frac{1}{7}=\frac{1}{3\times 7}$

- תרגול בעיות בהיקפים ושטחים של צורות המורכבות ממלבנים

דוגמה:

שטח של מסגרת מלבנית, שטח של תרשים דירה עם חדרים מלבניים.

אפשר לעסוק בחישוב שטח במ"ר על פי תרשים שבו כל 1 ס"מ מייצג אורך של מטר (קישור לקנה מידה).

בחישובי שטחים והיקפים ישולבו ביטויים אלגבריים.

דוגמאות:

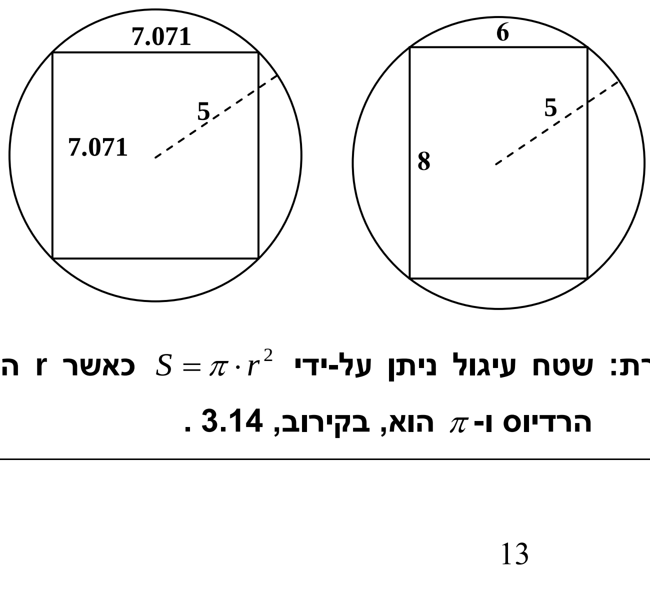
1. היקף מלבן הוא 36 ס"מ. אורך צלעו האחת גדול ב-3 ס"מ מאורך הצלע האחרת. מה שטח המלבן?
2. הגדילו צלע ריבוע ב-5 ס"מ והקטינו את הצלע האחרת ב- 5 ס"מ. התקבל מלבן ששטחו 200 סמ"ר. מה היה השטח של הריבוע?

הערה: יהיו תלמידים שיפתרו על ידי אומדן או על ידי נסייה וטעייה.

3. נתון מלבן שצלעותיו 20 ס"מ ו-40 ס"מ. הגדילו צלע אחת של מלבן ב- 10% והקטינו את הצלע האחרת ב- 10%. מבלי לפתור, שערו: האם שטח המלבן החדש גדול, קטן, או שווה לשטח המלבן המקורי?
בדקו את השערתכם על ידי חישוב.

הערה: בכיתות מתקדמות אפשר לתת אותה שאלה עם פרמטרים.

4. א. במעגל שמחוגו 5 ס"מ מסורטט מלבן שצלעותיו 6 ו-8 ס"מ.
חשבו את שטחי העיגול והמלבן ומצאו פי כמה גדול שטח העיגול משטח המלבן.
ב. במעגל שמחוגו 5 ס"מ מסורטט ריבוע שצלעו 7.071 ס"מ.
חשבו את שטח הריבוע ומצאו פי כמה גדול שטח העיגול משטח הריבוע.



תזכורת: שטח עיגול ניתן על-ידי $S=\pi\cdot r^2$ כאשר r הוא אורך הרדיוס ו- π הוא, בקירוב, 3.14 .

יש לדון בהשתנות שטח המלבן כתוצאה משינוי באורך הצלעות, לפחות במקרים של הכפלת זוג אחד של צלעות מקבילות ב-2 או ב- 10, או הכפלת שני הזוגות ב-2 או ב-10.

יש להתייחס ל:

א. מעברים בין יחידות אורך שונות: מ"מ, ס"מ, מ', ובין מ', ק"מ.

ב. מעברים בין יחידות שטח שונות: סמ"ר, מ"ר בלבד.

דוגמה:

חברת פסים זכתה במכרז להנחת פסי רכבת. פסי הרכבת מורכבים מקטעים שאורך כל אחד מהם 12 מ'. כמה קטעים של פסים צריכה החברה להזמין על מנת להרכיב מסילה באורך 3 ק"מ?

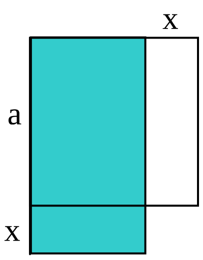
דוגמה למשימת חקר למתקדמים:

מבין כל המלבנים בעלי היקף נתון מצאו את המלבן בעל השטח המכסימלי .

שימו לב: מטרות המשימה הן:

א. פעילות חקר.

ב. הדגמת קשר בין אלגברה לגאומטרייה (לא לימוד נוסחאות).



התלמידים יחקרו השתנות שטח מלבן בעל היקף נתון וישערו מתי מתקבל השטח המכסימלי של מלבן כזה.

הערה: בשלב ראשון התלמידים יחקרו השתנות שטח של מלבנים שמידותיהם נתונות במספרים.

בשלב שני, יש לכוון להכללה של מסקנת החקירה.

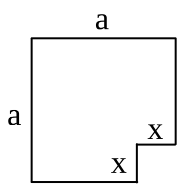
התלמידים יכולים להצדיק את השערתם על סמך שיקולים גאומטריים.

נתבונן בסרטוט:

נצא מריבוע שאורך צלעו הוא a ונשווה את שטחו לשטח מלבנים שונים.

על מנת לשמור על היקף קבוע, נגדיל את אחת הצלעות של הריבוע ב-x ונקטין את הצלע האחרת ב- x. התקבל מלבן ששטחו: $(a-x)(a+x)$.

המלבן התקבל מהריבוע המקורי על ידי הוספת מלבן שצלעותיו הן: x, $a-x$ ושטחו $x(a-x)$ והחסרת מלבן שצלעותיו הן: x, a ושטחו xa. רואים שהתוספת קטנה מהחלק שנגרע ולכן מכל המלבנים שווי ההיקף, לריבוע יש השטח הגדול ביותר, כלומר: $a^2 > (a-x)(a+x)$



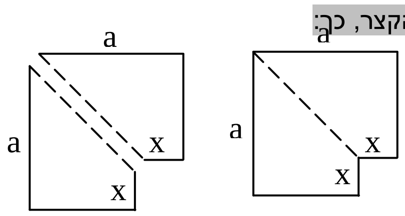
קל לראות בסרטוט שהחלק שנוסף קטן מהחלק שנגרע ב – x^2 ולכן,

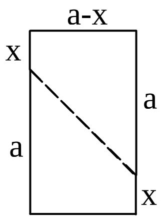
$a^2 - x^2 = (a-x)(a+x)$.

שימו לב: זהו מפגש ראשון של התלמידים עם הנוסחה.

אין כוונה לעסוק בתרגול של הנוסחה בשלב זה.

הערה: משימה זו מקשרת בין גאומטרייה לאלגברה.

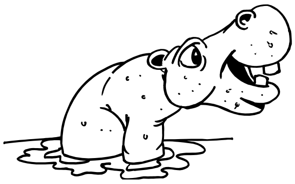
<table dir="rtl">
<tr>
<td></td>
<td>
דרך נוספת (לתלמידים מתקדמים) להגיע לנוסחה
$a^2 – x^2 = (a –x)(a + x)$ היא על ידי התבוננות
במשושה שבסרטוט, ששטחו $a^2 – x^2$.
נחתוך את המשושה לאורך האלכסון הקצר, כך:


משני החלקים שהתקבלו נבנה מלבן, כך:


שטח המלבן הוא $(a + x)(a – x)$.
ולכן מתקיים: $a^2 – x^2 = (a + x)(a – x)$
</td>
</tr>
<tr>
<td>
תיבה
• חזרה על המונחים: קדקוד, פאה, מקצוע, שטח פנים
הערה: למקצוע אפשר לקרוא גם צלע.

• נפח תיבה (חזרה)
</td>
<td>
דוגמה:
נתונה התיבה שמימדיה 2 ס"מ, 3 ס"מ, 4 ס"מ. מהי הצורה של הפאות של התיבה?
דוגמה: משימת חקר
נתונים המלבנים: 5x7 , 3x3 , 4x5 , 3x7 , 5x3.
א. האם ניתן להרכיב מהם כפאות את התיבות שממדיהן:
4x5x7 , 3x7x5 , 3x4x5 , 3x3x5
הערה: אפשר להשתמש בכל מלבן מספר פעמים.
ב. איזו תיבה נוספת אפשר לבנות מהמלבנים הנתונים?

בשלב ראשון עיסוק בנוסחת הנפח במקרה שהממדים הם כפולות שלמות של ס"מ (באנלוגיה לנוסחה לשטח מלבן). בשלב שני רצוי לעסוק גם בכפולות רציונאליות של מידות האורך במקרים פשוטים כמו: 2x4.5x3.5.
יש להתייחס למעברים בין יחידות שונות של נפח:
מעברים בין סמ"ק (מ"ל) לבין דצמ"ק (ליטר) לבין מ"ק.
• תרגול בעיות בשטח פנים ונפח של גופים המורכבים מתיבות.
דוגמאות:
1. משימה: שטח הפנים יחסית לנפח
בעלי חיים ממחלקת היונקים מאבדים חום דרך העור, ומחזירים לעצמם את החום שאבד על-ידי הפקת אנרגיה מהמזון שהם אוכלים. כמות החום ההולכת לאיבוד תלויה בשטח שעל פני הגוף המכוסה עור, וכמות האנרגיה החדשה הנוצרת תלויה בנפח גופו של היונק.
</td>
</tr>
</table>



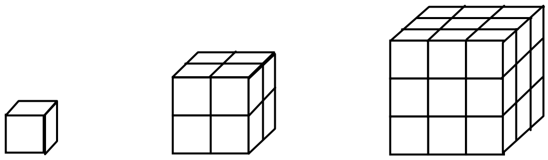
חַדַּף הוא היונק הקטן ביותר בעולם

(הוא נקרא כך כיוון שאפו מחודד),

והוא אוכל ללא הפסקה, כדי לשמור על חום גופו. כמות המזון שהוא אוכל ביום שווה למשקל גופו ויותר. היפופוטם החי באזורים חמים רובץ כל היום במים, כדי שגופו לא יתחמם יתר על המידה.

כדי להסביר שתי תופעות אלו, נחשוב על החדף כעל קובייה קטנה, ועל ההיפופוטם כעל קובייה גדולה.

שטח הפנים של קובייה הוא השטח שרואים משׁשת צדדיה (כלומר זהו שטח "העור" שלה).
נפח של קובייה הוא מספר קוביות היחידה שמידותיהן 1 x 1 x 1 המרכיבות את הקובייה הנתונה.



לפניכם טבלה
המתארת נתונים של סדרת קוביות ההולכות וגדלות.
בכל שורה בטבלה, אורך צלע, שטח פנים ונפח, וכן היחס בין שטח הפנים לנפח של קובייה.

אורך צלע (ס"מ)	שטח פנים (סמ"ר)	נפח (סמ"ק)	היחס = $\frac{\text{שטח פנים}}{\text{נפח}}$ (ביחידות שצוינו)
1	6	1	6
2	24	8	3
3	54	27	
4	96	64	$1\frac{1}{2}$
5	150	125	$1\frac{1}{5}$
6	216	216	1
7	294	343	$\frac{6}{7}$
8			

1. חשבו את היחס בין שטח פנים לנפח של קובייה בעלת אורך צלע 3 ס"מ.
2. השלימו את השורה האחרונה בטבלה.
3. סמנו את התשובה הנכונה.

א. בקוביות גדולות, שטח הפנים גדול יחסית לנפחן, בהשוואה לקוביות

קטנות.

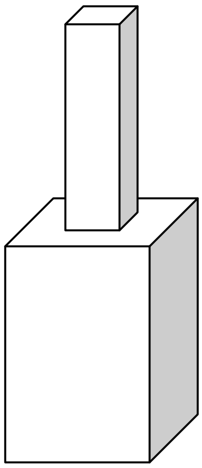
ב. בקוביות גדולות, שטח הפנים קטן יחסית לנפחן, בהשוואה לקוביות קטנות.

4. חזרו אל המידע שבמסגרת על החדף וההיפופוטם.

א. מה תוכלו לומר על שטח פני העור של ההיפופוטם יחסית לנפחו, בהשוואה לחדף?

ב. הסבירו מדוע החדף מתאמץ לשמור על חום גופו, ואילו ההיפופוטם משתדל לאבד חום מגופו.

2. **משימה: ממגורה**



ממגורה (מבנה לאחסון) לאחסון חיטה מורכבת מתיבה ריבועית (תיבה שבסיסה ריבוע) תחתונה ועליה תיבה ריבועית עליונה, קטנה יותר.
לשתי התיבות אותו הגובה – h.
ממלאים את הממגורה בחיטה בקצב אחיד של 2 מ"ק בדקה.
זמן המילוי של התיבה התחתונה הוא פי 9 מזמן המילוי של התיבה העליונה.

א. פי כמה גדול נפח התיבה התחתונה מנפח התיבה העליונה?

ב. צלע הבסיס של התיבה העליונה הוא a.
צלע הבסיס של התיבה התחתונה הוא b.
רשמו ביטוי לקשר שבין a ל b.

ג. ממלאים את הממגורה (כלומר, את המבנה של שתי התיבות) עד כדי $\frac{1}{2}$ מהקיבולת שלה (מנפחה).
האם גובה החיטה מתחתית הממגורה יהיה גדול מ - h? נמקו.

ד. ממלאים את הממגורה עד כדי $\frac{2}{3}$ מהקיבולת שלה.
האם גובה החיטה מתחתית הממגורה יהיה גדול מ - h? נמקו.

ה. ממלאים את הממגורה עד כדי 90% מהקיבולת שלה.
מה גובה החיטה מתחתית הממגורה?

ו. ממלאים את הממגורה עד כדי 95% מהקיבולת שלה.
מה גובה החיטה מתחתית הממגורה?

- שינוי נפח תיבה כתוצאה מהגדלת אורכי המקצועות (הצלעות) פי מספר כלשהו

בכיתות מתקדמות יידונו גם שינויים לא אחידים בהכפלת אורכי הצלעות.

דוגמה:
איך משתנה נפח תיבה אם מגדילים את אורך אחת הצלעות פי 2, מגדילים אורך צלע אחרת פי 3 ומקטינים את אורך הצלע השלישית פי 6.
אפשר לנסח את השאלה גם במונחים: אורך התיבה, רוחבה וגובהה.

תחום אלגברי	תחום מספרי	תחום גאומטרי
2. פתרון משוואות פשוטות, שאלות מילוליות פשוטות (12 שעות)	**2. מספרים מכוונים, מספרים הפוכים וחילוק ב- 0** (18 שעות)	**2. משולש ישר זווית,שטח משולש, זווית, מדידת זווית** (12 שעות)

נושאי הלימוד	הבהרות ודוגמאות
תחום אלגברי: 2. פתרון משוואות פשוטות ושאלות מילוליות פשוטות	
א.פתרון משוואות פשוטות	**שימו לב לכך שלעיתים נזדקק גם לכללי חישוב שלא נוסחו לעיל במפורש. למשל, אפשר לשנות את סדר ביצועם של חיבורים וחיסורים כל עוד המחוברים נשארים מחוברים והמחוסרים נשארים מחוסרים.** **כך: 5 + 3 – 4 = 5 – 4 + 3.**
• **משוואה**	**המטרה העיקרית היא להכיר לתלמידים את מושג המשוואה ואת המושג של פתרון משוואה.** **דוגמה:** חשבתי על מספר, כפלתי אותו ב 2, חיסרתי 3, הוספתי שוב את המספר וקיבלתי 21. מהו המספר? **התרה:** נסמן את ה"מספר שחשבתי עליו" ב- x. נכתוב את הפעולות שעשינו ב- x: 2x – 3 + x קיבלנו ביטוי למספר 21, נרשום את ה**משוואה:** 3x – 3 = 21 נחפש את **פתרון המשוואה**, כלומר את ערך x שנותן שוויון. **הערה: בדוגמה, יצאנו משאלה למשוואה. בדרך זו אפשר להשתמש גם בהמשך ההוראה.**
פתרון משוואות ליניאריות במשתנה אחד, המופיע באחד האגפים של המשוואה (כולל דוגמאות עם מכנה מספרי)	**במהלך פתרון המשוואות, יש גם לשלב פעולות בביטויים על סמך חוקי הפעולות: כינוס איברים דומים, פתיחת סוגריים.** **אפשר להגיע לפתרון המשוואות הפשוטות על ידי ניחוש או על ידי שימוש בפעולות חשבון, בחוקי הפעולות ובסדר הפעולות.** **דוגמאות:** 1. $3x – 5= 11$ 2. $\frac{x}{3} = 7$ 3. $x + 6 + 2x – 4 = 8$

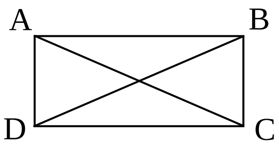
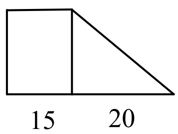
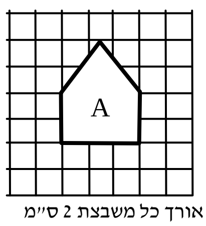
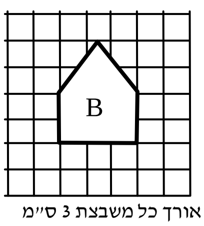
נושאי הלימוד	הבהרות ודוגמאות
	4. $2(x + 5) = 18$ 5. $3x - (x + 5) = 15$ 6. $\frac{x+4}{3} = 7$ • בדיקה האם מספר מוצע הוא פתרון על ידי הצבתו במשוואה. **דוגמאות:** 1. איזה מהמספרים הבאים: 1, 3, 2, הוא פתרון של המשוואה: $x^2 = x + 2$? 2. איזה מהמספרים הבאים: 4, 6, 2, הוא פתרון של המשוואה: $\frac{2x+3}{5} = 3$? **התלמידים יציבו במשוואה את הפתרון שקיבלו וכך יבדקו את נכונות הפתרון. אם המשוואה התקבלה מבעיה מילולית, אז יש לבדוק אם הפתרון מתאים לבעיה.**
ב. בעיות מילוליות נוספות שניתנות לפתרון על ידי משוואות ליניאריות פשוטות	**הבעיות יעסקו בתכנים שונים.** **דוגמאות:** 2. בכיתה 26 תלמידים. מספר הבנות קטן ב-4 ממספר בנים. כמה בנות בכיתה? כמה בנים? **הערה: כאן ובבעיות נוספות, אם תלמיד פתר את השאלה בדרך חשבונית אחרת יש לקבל זאת, אך יש להראות לתלמידים דרך פתרון אלגברית.** 3. יש שתי משקלות. האחת כבדה פי 2 מהאחרת. משקלן הכולל $13\frac{1}{2}$ קילוגרם. מה משקל המשקולת הקלה? 4. במשולש ישר זווית, זווית אחת קטנה ב- 20^0 מהזווית החדה האחרת. מצאו את גודל הזוויות. (אם הרקע הגאומטרי המתאים כבר נלמד). 5. קנו 3 קילוגרם בננות במחיר של 6 ₪ לקילוגרם ו-4 קילוגרם תפוזים. בסך הכל שילמו 28 ₪. מה מחיר קילוגרם תפוזים?

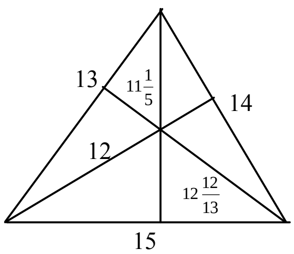
תחום מספרי: 2. מספרים מכוונים	
נושאי הלימוד	**הבהרות ודוגמאות**
א. הצגת מספרים מכוונים על	**היכרות עם מספרים מכוונים: שלמים, שברים פשוטים, מספרים**

ישר המספרים, סדר על ישר המספרים. **ערך מוחלט** • **מספרים נגדיים** **ב. שימושים** **ג. ארבע פעולות חשבון במספרים מכוונים**	**עשרוניים.** **משמעות המושג ערך מוחלט כמרחק המספר מ- 0 על ישר המספרים, ללא התייחסות לכיוון.** **הסימון של הערך המוחלט.** **דוגמה:** $\|3\| = \|-3\| = 3$ **תכונה: סכום מספרים נגדיים הוא אפס.** **שימוש במספרים מכוונים לתיאור תופעות ומצבים כמו: טמפרטורה מעל ל- 0 ומתחת ל - 0, גובה מעל ומתחת לפני הים.** **אין צורך לעסוק בתרגילים המשלבים ערך מוחלט.** **היכרות עם הפעולות. הקשר בין הפעולות במספרים מכוונים לבין הפעולות במספרים לא שליליים.** **ההיכרות עם פעולות החיבור והחיסור במספרים מכוונים תוכל להיעזר במודל כגון תנועות על ישר המספרים או רווח והפסד.** **את פעולת הכפל אפשר ללמד במספר דרכים, אחת מהן היא המסלול הבא: תחילה נראה כיצד כופלים (ללא הסבר ואולי עם הדגמה במחשבון) ואחרי תרגול נראה בדוגמאות מעטות שזה תואם את הכללים המוכרים.** **כללי החילוק נגזרים מהכללים המקבילים בכפל.** $\frac{a}{0}$ **הוא ביטוי חסר משמעות.** • יישום של סדר הפעולות וחוקי הפעולות למספרים מכוונים מסוגים שונים. **דוגמאות:** 1. פתרו את התרגילים וסמנו את התוצאות על ישר המספרים: 5 + 2 = 5 + (-2) = 5 - (+2) = 5 - (-2) = $(-\frac{1}{2})\cdot\frac{1}{4}=$ $(-6):(-3)=$ $3\cdot(-4)=$ 2. 2(-3 +5) – 4(4 – 9) = 3. נתונה רשימת המספרים: $\frac{1}{20}$, -20 , $-\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}$, -5 א. לכל מספר מהרשימה, חברו שני תרגילי חיבור שונים כך שהמספר הנתון הוא תוצאת התרגיל. הקפידו שאחד המספרים המחוברים יהיה שלילי. ב. לכל מספר מהרשימה, חברו שני תרגילי כפל (חילוק) שונים כך שהמספר הנתון הוא תוצאת התרגיל.

	ג. לאילו מספרים מהרשימה אפשר להתאים תרגיל חיבור שבו שני המחוברים הם מספרים שליליים? ד. לאילו מספרים מהרשימה אפשר להתאים תרגיל כפל שבו שני הגורמים הם מספרים שליליים? 4. מצאו את הממוצע של המספרים -12.7 , 5.5 , -4 , -3.1 , 2.4. • פתירת משוואות שפתרונן מספר שלילי או שבמהלך פתרונן יש צורך בפעולות במספרים מכוונים.
חזקות עם מעריך טבעי, בסיס החזקה - מספר מכוון (שלם, שבר פשוט, מספר עשרוני)	**יטופלו חזקות עם המעריכים: 1, 2, 3 (לפחות).** **לפי הסכמי סדר פעולות, חזקה קודמת לפעולות אחרות כולל מעבר למספר הנגדי ולכן:** 1. $(-3)^2 \neq -3^2$ 2. $(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$ 3. $-3^2 = -(3 \cdot 3) = -9$ 4. $10 - 3^2 = 10 - 9 = 1$ 5. $(-2)^3 = -8$ 6. $3 - (-3)^3 = 30$ 7. $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

תחום גאומטרי: 2. משולש ישר זווית,שטח משולש, זווית, מדידת זווית	
נושאי הלימוד	**הבהרות ודוגמאות**
משולש ישר זווית **• מושגים: ניצב,יתר.** **• טענה:** **משולשים ישרי זווית השווים בשני הניצבים אחד לאחד, חופפים.** **• טענה:** **אלכסון במלבן מחלק את**	**הנמקה: אפשר להראות את חפיפת שני המשולשים ישירות מהנחת זווית על זווית וכו'.** **הנמקה: אפשר להראות את החפיפה על ידי גזירת המלבן לאורך האלכסון והנחת שני המשולשים זה על זה.**

המלבן לשני משולשים חופפים.	**ניתן לנמק גם על פי הטענה הקודמת (על פי שוויון הצלעות הנגדיות במלבן).**
• **טענה:** **האלכסונים במלבן שווים זה לזה.**	**הנמקה: האלכסונים במלבן יוצרים במלבן שני משולשים ישרי זווית חופפים.** **המשולשים ADC ו- BCD חופפים זה לזה,** **ולכן AC = BD** 
• **טענה:** **כל משולש ישר זווית ניתן להשלים למלבן ששתיים מצלעותיו הם ניצבי המשולש ואלכסונו הוא היתר.**	**הנמקה: כשמעלים אנכים לניצבים בקצות היתר מתקבל מרובע בעל שלוש זוויות ישרות ולכן גם הרביעית ישרה.** **הערה: כאמור לעיל, המתקבל משולש חדש החופף לנתון.**
• **שטח משולש ישר זווית שווה למחצית מכפלת הניצבים**	**הנמקה: שטח משולש ישר זווית שניצביו *a, b* שווה למחצית שטח של מלבן שצלעותיו *a, b*. בביטוי אלגברי, שטח המשולש הוא:** $\frac{a \cdot b}{2}$ **או** $\frac{1}{2}a \cdot b$ **.**
	• עיסוק בבעיות בהיקפים ושטחים של צורות המורכבות ממלבנים וממשולשים ישרי זווית. (דוגמה אפשרית: מקבילית) **דוגמאות:** 1. הטרפז שבסרטוט חולק למלבן ולמשולש. למי משניהם שטח גדול יותר?  2. לפניכם סרטוטים של שני מגרשים מחומשים: *A* ו-*B*.  אורך כל משבצת 2 ס״מ  אורך כל משבצת 3 ס״מ א. איזה מבין המגרשים המחומשים הוא לדעתכם בעל שטח גדול יותר? כיצד הגעתם למסקנה זו? ב. מהו היחס בין השטחים של שני המגרשים?

• **שטח של משולש** • **גבהים במשולש**	ג. מה היחס בין ההיקפים של שני המגרשים? **לצורך פיתוח הנוסחה לחישוב השטח יילמד מושג הגובה.** **בהתנסות התלמידים יגלו שהגובה יכול להיות פנימי או חיצוני (במשולש קהה זווית הגובה היוצא מקדקוד של זווית חדה הוא חיצוני.) או להתלכד עם צלע (במקרה שהיא ניצב של משולש ישר זווית)** **דוגמה לפעילות:** בנו גבהים במשולשים שונים. אפשר לחקור את השאלות הבאות. (ניתן גם להיעזר בתוכנה של גאומטרייה דינאמית): א. האם ייתכן משולש שאחד מגבהיו נמצא מחוץ למשולש? ב. האם ייתכן גובה אחד בתוך המשולש ושני גבהים מחוצה לו? ג. האם ייתכנו שני גבהים בפנים המשולש וגובה אחד מחוצה לו? ד. פרטו אפשרויות נוספות.
• **שטח המשולש שווה למחצית מכפלת אחת הצלעות של המשולש בגובה המורד אליה**	**על מנת לחשב שטח של משולש לפי צלע וגובה פנימי, נסרטט את הגובה. יתקבלו שני משולשים ישרי זווית. שטח המשולש יתקבל על ידי חיבור השטחים של שני המשולשים.** **על מנת לחשב שטח של משולש לפי צלע וגובה חיצוני, נסרטט גובה חיצוני ונחסר את השטחים של שני המשולשים ישרי הזווית המתקבלים.** **דוגמאות:** 1. חשבו את שטח המשולש שבסרטוט בשלוש דרכים שונות.  2. במשולש נתונות שתי צלעות באורכים 6.25 ס"מ ו-15 ס"מ ושני גבהים לצלעות אלה באורכים 12 ס"מ ו-5 ס"מ. א. מי משני הגבהים הוא הגובה לצלע באורך 15 ס"מ? ב. חשבו את שטח המשולש, פעם בעזרת הצלע באורך 6.25 ס"מ ופעם בעזרת הצלע באורך 15 ס"מ. ג. יורם אמר ששטח המשולש הוא או: $\frac{15\cdot 12}{2}$ סמ"ר או: $\frac{6.25\cdot 5}{2}$ סמ"ר.

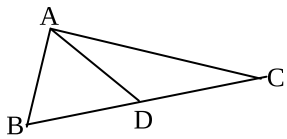
- **תיכונים במשולש**

הגדרה:

תיכון במשולש הוא קטע המחבר את אחד הקדקודים של המשולש עם אמצע הצלע שמולו.

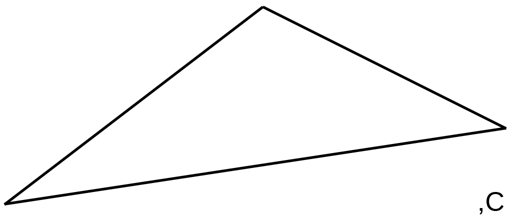
מהי טעותו?

הגדרת תיכון במשולש תשולב בפעילות של השוואת השטחים של שני משולשים המתקבלים על ידי חיבור קדקוד המשולש עם אמצע הצלע שמולו.



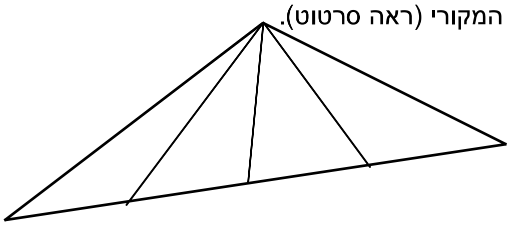
דוגמאות:

1. AD הוא תיכון במשולש ABC.
   האם שטחי המשולשים ABD ו ACD שווים זה לזה? נמקו.
2. חלקו משולש ל-4 משולשים שווי שטח בדרכים שונות.
3. משימה: ירושת קרקע
   אב הוריש לארבעת בניו
   חלקת קרקע
   מישורית שצורתה
   משולש שקדקודיו הם A, B, C,
   וציווה עליהם לחלקה ביניהם לארבעה שטחים שווים.



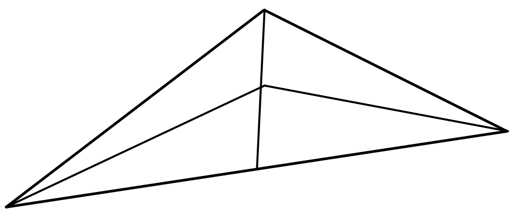
כל אחד מהבנים הציע דרך מקורית לחלוקת השטח.

א. ראובן הציע לחלק את הצלע BC לארבעה חלקים שווים. את נקודות החלוקה, P, Q ו- R מחברים עם הקדקוד A כך שנוצרים ארבעה משולשים בתוך המשולש המקורי (ראה סרטוט).

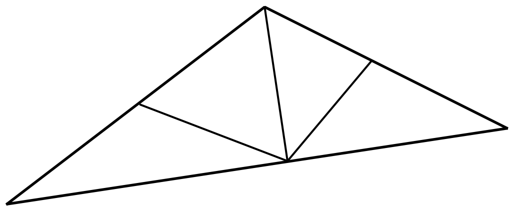


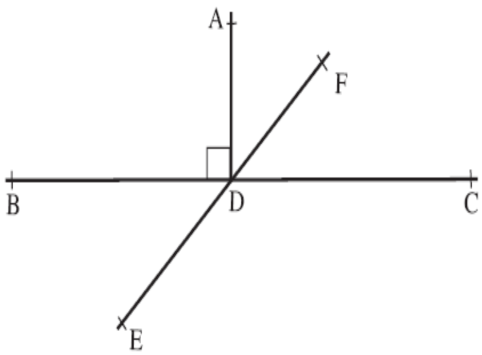
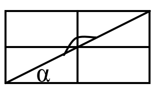
קבעו האם הצעתו של ראובן מחלקת את השטח לארבעה חלקים שווים, ונמקו את תשובתכם.

ב. שמעון הציע להעביר מהקדקוד A תיכון AT לצלע BC. מהנקודה S שבמחצית התיכון AT מתח שמעון שני קוים לעבר הקדקודים B, ו- C (ראו סרטוט).



קבעו האם הצעתו של שמעון מחלקת את השטח לארבעה חלקים שווים,

	ונמקו את תשובתכם. ג. לוי הציע לסרטט גובה AD לצלע BC, ושני תיכונים DE ו – DF לצלעות AC ו – AB.  קבעו האם הצעתו של לוי מחלקת את השטח לארבעה חלקים שווים, ונמקו את תשובתכם.
• **זווית ומדידת זווית** **חזרה על מונחים: קדקוד, שוק, זווית שטוחה, זווית ישרה, זווית חדה, זווית קהה, מעלות.** **טענות:** • **סכום הזוויות הפנימיות במשולש ישר זווית הוא 180^0.** **מסקנה:** **במשולש ישר זווית, סכום שתי הזוויות האחרות הוא 90^0.** • **סכום הזוויות הפנימיות במשולש כלשהו הוא 180^0.** • **סכום הזוויות בכל מרובע הוא 360^0.**	**שימוש במד-זווית למציאת גודל זווית ולבניית זווית בגודל נתון (למשל בבניית משולש).** **הנמקה:** **סכום הזוויות במשולש ישר זווית ינומק על ידי השלמה למלבן וייבדק במדידות במד זווית.** **הערה: אפשר להתחיל בסכום הזוויות האחרות ולהגיע לסכום הזוויות במשולש.** **הנמקה:** **תידון גישה שיטתית למציאת סכום הזוויות במשולש דרך חלוקה למשולשים ישרי זווית.** **הנמקה:** **סכום הזוויות ינומק על ידי חלוקת המרובע (או המצולע) למשולשים על ידי אלכסון (או אלכסונים).** **בכיתות מתקדמות: סכום הזוויות הוא 360^o גם במרובע לא קמור. בעזרת ההנמקה על ידי אלכסון פנימי נבהיר את עניין הזווית הגדולה מ-180^o.**

זוויות צמודות, זוויות קדקודיות • **חוצה זווית**	**דוגמה** : האם ייתכנו שתי זוויות צמודות חדות? נמקו. **חציית זווית תודגם על ידי קיפול נייר.** הגדרת חוצה הזווית תשולב לדוגמה בפעילות כזו: **דוגמה:**: חוצי הזוויות של זוויות צמודות מאונכים זה לזה. נמקו. **בכיתות מתקדמות: חוצה זווית של זווית הוא קו הסימטרייה שלה.** (נושא הסימטרייה נלמד בבית הספר היסודי.) **יבוצעו בניות פשוטות בסרגל ובמד-זווית, כמו בניית משולש לפי צלע-זווית-צלע או לפי זווית-צלע-זווית כולל מציאת זוויות דרושות בעזרת משפט סכום הזוויות. העתקת הזווית תהיה לפי גודלה, בעזרת מד זווית.**
• טענה: **זוויות קדקודיות שוות זו לזו.**	**הנמקה:** **הטענה תוכח במקרה פרטי מייצג (ז. א. מקרה פרטי שאפשר להסיק ממנו על המקרה הכללי), וגם תיכתב באותיות.** **דוגמה** לשאלת חישוב: הקטעים EF ו- BC שבסרטוט נחתכים בנקודה D. נתון: $AD \perp BC$ $\measuredangle ADF = 43^\circ$  מה הגודל של $\measuredangle BDE$ ושל שאר הזוויות שבסרטוט? **דוגמאות** לשאלות הדורשות הנמקה (לכיתות מתאימות): 1.נתונות שתי זוויות קדקודיות. האם הישר החוצה את אחת הזוויות חוצה גם את השנייה? נמקו. 2.בסרטוט המצורף כל המלבנים חופפים **טענה**: שני אלכסוני המלבנים נמצאים על ישר אחד. נמקו. **הדרכה**: חשבו את הזווית המסומנת בקשת. 

תחום אלגברי	תחום מספרי	תחום גאומטרי
3. מושג הפונקציה **השתנות בקצב קבוע ובקצב לא קבוע** **ייצוגים: מספרי, גרפי, סימבולי** **פונקציה קווית** (15 שעות) **פתרון משוואות, שאלות מילוליות –המשך** **אי שוויונות** (15 שעות)	**3. הסתברות** (8 שעות)	**3. משפטי החפיפה של משולשים** (8 שעות)

תחום אלגברי: 3. פונקציה, השתנות בקצב קבוע ובקצב לא קבוע
ייצוגים: מספרי, גרפי, סימבולי, פונקציה קווית
פתרון משוואות, שאלות מילוליות, אי שוויונות

נושאי הלימוד	הבהרות ודוגמאות
פונקציה: y הוא פונקציה של x אם בחירת ערך מספרי אפשרי של x קובעת ערך מספרי מתאים יחיד בשביל y.	**אפשר גם להשתמש באות f לסימון הפונקציה, ואז כדי להראות את תלות ערך Y בערך X כותבים את ערך Y המתאים ל-X כ- f(X). כך f(5) הוא ערך Y המתאים לערך X שהוא 5, כלומר זהו הערך שהפונקציה f מקבלת כאשר X = 5 .** **אפשר לסמן פונקציה גם באות לטינית אחרת במקום f, כאשר בדרך כלל משתמשים לכך באחת האותיות g,h.** **אין להיכנס לדיון על תחום ההצבה אך נציין, למשל, שעבור הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$ אין משמעות ל- f(0).** **דוגמה:** שטח הריבוע נקבע על ידי האורך של צלע הריבוע. שטח הריבוע הוא פונקציה של צלע הריבוע. אפשר לכתוב פונקציה זאת כ- $y = x^2$, וגם, אם נכנה פונקציה זאת בשם f אז לכל מספר חיובי x מתקיים $f(x) = x^2$. אם וכאשר מתעוררת השאלה מהו f(x) כאשר x הוא מספר ש- f לא מתאימה לו מספר כלשהו אז יש לומר שבמקרה זה אומרים ש- f(x) אינו מוגדר.
• **השתנות בקצב קבוע ובקצב לא קבוע**	**הבחנה בקצב שינוי קבוע או לא קבוע בתופעות המוצגות באופן מילולי וגרפי.** **התופעות יכללו גם כאלה שאין להן חוקיות מתמטית.**

- **מערכת צירים קרטזית סימון נקודות וקריאת נקודות**

מערכת צירים קרטזית (על שם המתמטיקאי הצרפתי דקארט, שהגירסה הלטינית של שמו היא קַרטֶזיוּס) **היא מערכת צירים שבה שני הצירים מאונכים זה לזה.**

- **ייצוג גרפי של פונקציה**

ייצוג גרפי – ציור הפונקציה ע"י סימון כל הנקודות (x,y) במישור הצירים בהן y=f(x), כלומר שעבורן y הוא הערך שהפונקציה f מתאימה למספר x.

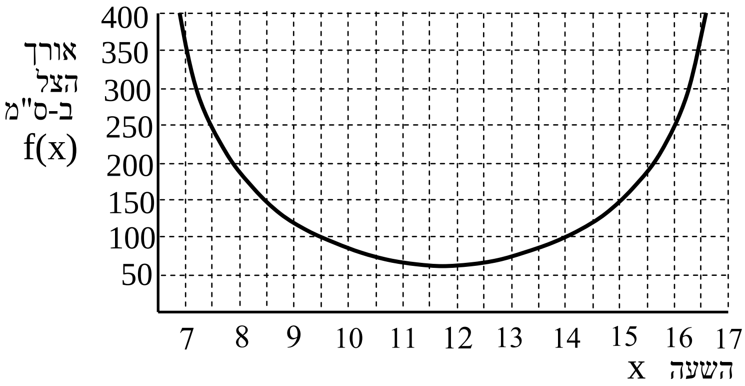
יודגם סרטוט גרף של פונקציה הנתונה ע"י נוסחה, כגון y=2x+5 ו- $y=x^2$, או f(x)=2x+5 ו- $f(x)=x^2$..

הדוגמה הבאה היא דוגמה מובילה שנחזור אליה יותר מפעם אחת. בדוגמה זו הגרף נתון מראש ואיננו מתייחסים לאופן בנייתו אלא רק לקריאת מידע מסוגים שונים מן הגרף.

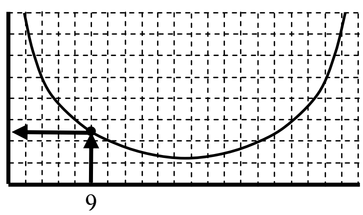
דוגמה:

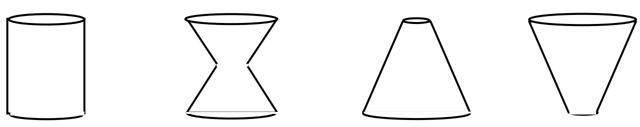
האורך של הצל שמטיל מוט הנעוץ באדמה תלוי באורך המוט, במקום, בתאריך ובשעה. בדוגמתנו נצטמצם למוט באורך 1 מטר, הנעוץ בשטח מישורי בירושלים, בתאריך 22 במרץ (שוויון יום ולילה) במקרה זה, יהיה אורך הצל תלוי בשעה בלבד.

נסמן את השעה ב- x (השעה אחת אחר הצהריים תסומן ב- 13:00 וכו'), ואורך הצל יסומן ב- f(x). למשל, אורך הצל בשעה 9:00 יסומן f(9). והרי הגרף:



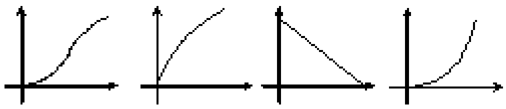
בציור המוקטן הבא, החץ, העולה מ- x = 9 אל הנקודה המודגשת בגרף ומשם שמאלה אל ציר אורך הצל, מראה כיצד רואים מן הגרף ש- f(9) שווה 120 .



	הערה: הגרף טוב למדי גם לשאר הארץ, ומתאים גם ל-22 בספטמבר לשעון חורף. **תרגילים:** א. מצאו מן הגרף את f(11), אורך הצל בשעה 11:00 ואת f(15). ב. מצאו על ידי הליכה אחורנית לאילו ערכי x יהיה f(x) שווה 250 (באילו שעות יהיה אורך הצל שווה ל- 250 ס"מ) ג. בשביל איזה x יהיה f(x) בעל הערך הקטן ביותר? (הערה: זה רבע שעה לפני שעה "שלמה" כי שעון הארץ מותאם לשעה האסטרונומית של קהיר)
• **ייצוג מספרי של פונקציה (טבלת ערכים)**	**ייצוג מספרי - בעזרת טבלת מספרים עם ציון כינויים של הגדלים המתוארים בטבלה.**
• **ייצוג סימבולי של פונקציה (על ידי נוסחה)**	**ייצוג סימבולי - קשר בין גדלים המבוטא ע"י ביטוי אלגברי.** **דוגמה:** שטח הריבוע הוא פונקציה של אורך צלעו. נסמן את אורך צלע ריבוע ב- x. הפונקציה: $f(x) = x^2$ מתארת את שטח הריבוע. שטח ריבוע שאורך צלעו 3 ס"מ הוא: 9 סמ"ר, כי: $f(3) = 9$. א. מהו ערכו של f(x) כאשר $x = 5$? ב. מהו f(6)?
• **פונקציה עולה ופונקציה יורדת**	**המושגים של עלייה וירידה של פונקציה בקטע או בסביבה קרובה של נקודה יובהרו בדרך איכותנית על ידי הסתכלות על מהלך הגרף של הפונקציה (כאשר המשתנה "החופשי" נע משמאל לימין.)** **דוגמאות:** 1. בגרף הדוגמה שלמעלה: א. האם f(x) עולה או יורד בסביבות $x = 8$, בסביבות $x = 13$? ב. היכן הגרף עולה יותר מהר: בסביבות $x = 15$ או בסביבות $x = 16$? 2.**שאלה למתקדמים** (תיאור מילולי וייצוג גרפי): לפניכם ארבעה כלים. מניחים כל כלי מתחת לברז שהמים נוזלים ממנו בקצב קבוע.  א. נסו לתאר כיצד ישתנה גובה המים בכל כלי עם הזמן. מתי מהר ומתי

לאט, באיזה כלי משתנה גובה המים משתנה בקצב קבוע?

ב. שלושה מהגרפים הבאים מתארים את השתנות גובה המים עם הזמן בשלושה מן הכלים. התאימו גרף לכלי. הסבירו מדוע הגרף השני מימין אינו מתאים, ותקנו אותו.



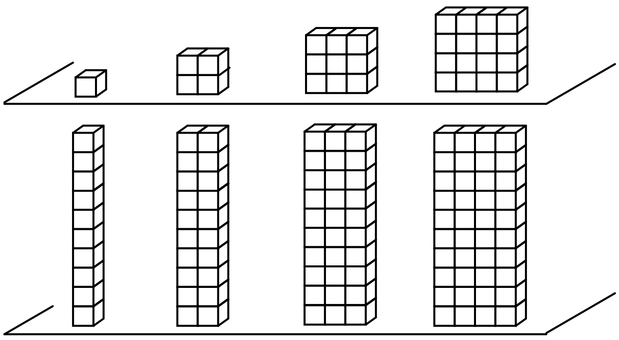
3. **משימה: מגדלים**

לפניכם שתי סדרות של מגדלים מקוביות, ההולכים וגדלים:

סדרת **מגדלי קובייה,** וסדרת **מגדלי עשר.**

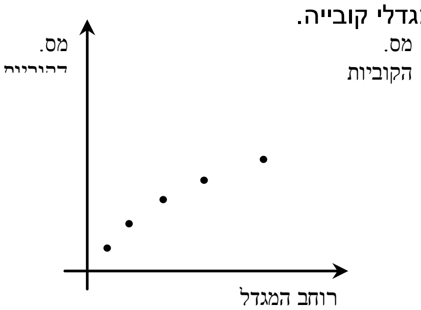
מגדל קובייה מתחיל מקובייה אחת, והוא גדל גם לגובה וגם לרוחב בכל פעם בשורה אחת.

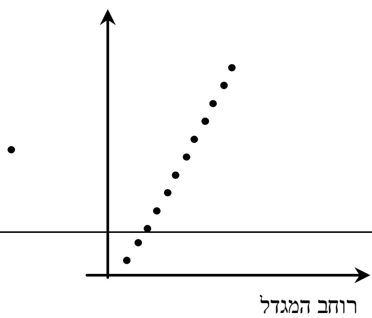
מגדל עשר הוא תמיד בגובה 10 קוביות (סיפרו) ורוחבו גדל בכל פעם בשורה אחת.



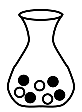
א. מצאו שני מגדלים משני הסוגים אך בעלי אותו רוחב, שלהם אותו מספר של קוביות.

ב. לפניכם שלוש סקיצות של גרפים. בחרו מביניהן סקיצה המתאימה לרוחב המגדל את מספר הקוביות של סדרת מגדלי עשר, וסקיצה למספר הקוביות של סדרת מגדלי קובייה.





	ג. האם שתי סדרות המגדלים משתנות בקצב קבוע? הסבירו. ד. אם R הוא הרוחב ו-K הוא מספר הקוביות שבמגדל, איזה משני הביטויים $K=10\cdot R$ $K=R\cdot R$ מתאים לסדרה הראשונה ואיזה לשנייה ? **הערה: בפרק זה ובפרק על הפונקציה הקווית, לא נטפל בתחום ובטווח ולא בתחומי חיוביות ושליליות או בתחומי עלייה וירידה של פונקציות.**
פונקציות קוויות בשלושת הייצוגים שלהם: מספרי, גרפי וסימבולי.	**הגדרת פונקציה קווית: פונקציה שהגרף שלה הוא קו ישר.** **לדוגמה, נראה שנקודות (x,y) המקיימות y = 3x + 4 מסתדרות על קו ישר. וכן, אם נציב ערכים שונים של x בהפרשים קבועים גם ערכי y יתקבלו בהפרשים קבועים.** **אין הכוונה להשתמש כאן בפרמטרים.** **מעבר מייצוג סימבולי לייצוג גרפי (סרטוט הגרף).**
פתרון משוואות קוויות **משוואות שצורתן:** $ax+b=cx+d$ **וכן משוואות שניתן להעבירן לצורה זו, כגון:** $a(bx+c)=d(fx+e)$ **גם בשברים**	**פתירה על ידי פעולות אלגבריות ופתירה על ידי סרטוט גרפים של שני האגפים.** **מספר הפתרונות של משוואה (רצוי לבסס על הייצוג הגרפי):** **למשוואה: 2x + 3 = 4x – 5 יש פתרון יחיד, שני הגרפים נחתכים בנקודה אחת.** **למשוואה: x + 3 = x – 5 אין פתרון.** **נימוקים אפשריים:** **א. שני הגרפים מקבילים.** **ב. אם נחסיר x משני האגפים נקבל: 3 = -5, וזה לא ייתכן. (הוא הדין אם נקבל: 0x = 8).** **במשוואה: 2x + 5 – x = x + 5 כל ערך שניתן ל- x הוא פתרון.** **נימוקים אפשריים:** **א. שני הגרפים מתלכדים.** **ב. המשוואה שקולה למשוואה: 0x = 0 ובמשוואה זו כל x הוא פתרון.**

שאלות מילוליות **אי שוויונות**	**השאלות יעסקו בתכנים שונים.** **דוגמאות:** 1. חשבתי על מספר, כפלתי אותו ב- 5, הוספתי 7, הפחתתי את המספר שחשבתי עליו וקיבלתי 25. מהו המספר? 2. לדני היו פי שתיים יותר בולים מאשר לרינה. כשהוא נתן לרינה 7 בולים היה להם מספר שווה של בולים. כמה בולים יש להם ביחד? 3. ליום הולדת, חשבו שיגיעו 18 ילדים, והכינו לכל אחד אותו מספר של מדבקות צבעוניות. בגלל שהגיעו 20 ילדים, כל אחד קיבל 2 מדבקות פחות. כמה מדבקות תוכננו לכל ילד מלכתחילה? **פתרון אי שוויונות פשוטים בדרך אלגברית, ובכיתות מתקדמות גם בדרך גרפית.** **דוגמאות:** **1.** $x + 3 < 7$ 2. $7x - 4 > 17$ 3. $-2x \le 1$
3. הסתברות **הסתברות, תוצאה,שכיחות יחסית**	**הגדרה של המושג הסתברות תתקבל כמסקנה מפעילות.** **הצעה אפשרית**: הכיתה תתחלק לקבוצות שבכל אחת מהן יטילו קובייה מספר רב של פעמים וירשמו בכמה מן המקרים התקבל 1 או 2 ובכמה התקבל 3,4,5 או 6. דיון יוביל למסקנה שמבנה הקובייה אינו מכתיב יחס מדויק בין התוצאות אך מכתיב את נטייתה של כל תוצאה להתממש. זו נקראת **הסתברות**. **תוצאה; לתוצאה ודאית הסתברות 1. לתוצאה שברור שלא תתממש הסתברות 0. לתוצאה שנטייתה להתממש שווה לנטייתה שלא להתממש הסתברות $\frac{1}{2}$.** **אם תוצאה מתפצלת לתוצאות משנה, הסתברותה היא סכום הסתברויותיהן (עדיין איננו נכנסים להבדל שבין מאורע לתוצאה).** **מודל הכד והכדורים**  **אם בכד לא שקוף נמצאים שבעה כדורים השווים בגודלם ובמשקלם אבל שונים בצבעם, ואם שלושה מהם לבנים וארבעת הנותרים הם שחורים, ואם מכניסים יד לכד, בוחשים את הכדורים ועומדים להוציא כדור אחד, אז ההסתברות שכדור זה יהיה לבן היא $\frac{3}{7}$ וההסתברות שיהיה שחור היא $\frac{4}{7}$.** **אותן הסתברויות קיימות גם אם בכד 6 כדורים לבנים ו-8 שחורים,**

וכדומה.

ניסוי בהטלת קובייה דומה, מבחינת ההסתברויות, לניסוי של הוצאת כדור מכד שיש בו ששה כדורים ועליהם המספרים 1, 2, 3, 4, 5, ו-6 , וההסתברות לכל תוצאה היא $\frac{1}{6}$.

אם כל מה שחשוב לנו בהטלת הקובייה הוא האם התקבל 1 או 2 או התקבל אחד מהמספרים 3, 4, 5 ו-6 אז הניסוי נחשב ניסוי בן שתי תוצאות אפשריות, והוא דומה לניסוי כד וכדורים עם שני כדורים שנצבעו לבן וארבעה שנצבעו שחור (וההסתברויות הן $\frac{2}{6}$ ו- $\frac{4}{6}$, כלומר, $\frac{1}{3}$ ו- $\frac{2}{3}$).

אם חזאי מזג האוויר מודיע שההסתברות שירד מחר שלג בירושלים היא $\frac{1}{4}$, הדבר אומר שלאור הנתונים המטאורולוגיים שבידיו הוא מעריך שבאותם הימים שבהם הנתונים הם דומים לאלו הנמצאים בידיו באותו יום, בכרבע מהם ירד שלג למחרת.
הסתברות זאת הנה כמו ההסתברות למשוך כדור לבן מכד בן 4 כדורים שאחד מהם לבן והשאר שחורים.

דוגמאות:

1. אם ההסתברות לשלג מחר בירושלים היא $\frac{1}{4}$, מהי ההסתברות **שלא** ירד שלג ?
2. בכד 7 כדורים אדומים, 2 כדורים צהובים ו-4 כדורים ירוקים (ולא שום כדור אחר) ומוציאים כדור אחד. חשבו והראו שמתקיים:
   1 = (ההסתברות לאדום) + (ההסתברות לצהוב) + (ההסתברות לירוק) .
   האם סכום ההסתברויות יהיה 1 גם אם נשנה את מספרי הכדורים בעלי הצבעים האלה?

3. התפלגות הכדורים שבכד היא כבטבלה הבאה:

אדום בהיר	אדום כהה	ירוק בהיר	ירוק כהה
8	4	6	6

מוציאים כדור אחד.

א. מהי ההסתברות שיהיה אדום-בהיר?

	ב. מהי ההסתברות שיהיה אדום ? ג. מהי ההסתברות שיהיה בהיר ? ד. אילו מהסתברויות אלה הייתה משתנה אם היו מוסיפים לכד 10 כדורים בצבע ירוק כהה?

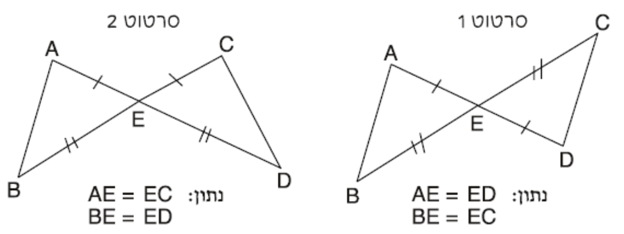
תחום גאומטרי: 3. סרטוט משולשים לפי נתונים, משפטי החפיפה של משולשים.	
נושאי הלימוד	**הבהרות ודוגמאות**
משפטי החפיפה של משולשים • **משפט:** **אם שתי צלעות במשולש אחד שוות לשתי צלעות במשולש אחר, והזוויות הכלואות בין הצלעות שוות זו לזו, אז המשולשים חופפים.** • **משפט:** **אם שתי זוויות במשולש אחד שוות לשתי זוויות במשולש אחר, והצלעות הנמצאות בין הזוויות שוות זו לזו, אז המשולשים חופפים.** • **משפט:** **אם שלוש צלעות במשולש שוות לשלוש צלעות במשולש אחר אז שני המשולשים חופפים.**	**הכרת משפטי החפיפה של משולשים ברמה קדם דדוקטיבית.** **התלמידים יתנסו בבניית משולשים על פי נתונים שונים.** **הבניה תיעשה בעזרת סרגל מסומן ומד זווית.** - **מטרת הפעילות**: מציאת התנאים המספיקים לחפיפה. **דוגמאות:** 1.נתונות שתי צלעות, כמה משולשים שונים ניתן לבנות על פי נתון זה? 2.נתונות שלוש זוויות, כמה משולשים שונים ניתן לבנות על פי נתון זה? 3.נתונות שתי צלעות והזווית ביניהן, כמה משולשים שונים ניתן לבנות על פי נתון זה? 4.נתונות שתי זוויות והצלע בין קדקודיהן, כמה משולשים שונים ניתן לבנות על פי נתון זה? 5.נתונות שלוש צלעות, כמה משולשים שונים ניתן לבנות על פי נתון זה? **שני משפטי החפיפה ינומקו על ידי הנחת החלקים המתאימים זה על זה.** **המחשת המשפט השלישי תיעשה למשל על ידי רצועות קשיחות בגדלים מתאימים המחוברות בנעצים או בסיכות.** • **זיהוי משולשים חופפים והנמקה על סמך משפט חפיפה מתאים.** • **זיהוי צלעות שוות וזוויות שוות במשולשים חופפים.**

דוגמאות:

1. האם כל המשולשים שווי השוקיים, בעלי אותו אורך שוק, חופפים זה לזה?

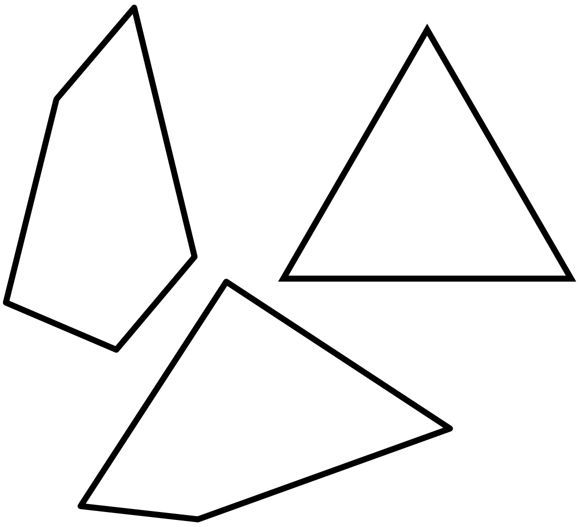
2.

לפניכם שני סרטוטים שונים - סרטוט 1 וסרטוט 2.
שימו לב לנתונים המצורפים לכל אחד מהם.



באיזה מהסרטוטים אפשר להסיק כי $\measuredangle D = \measuredangle B$?

נתבונן בסרטוט 1. המשולשים AEB ו DEC הם משולשים חופפים לפי משפט החפיפה צלע, זווית, צלע.
גם המשולשים AEB ו DEC של סרטוט 2 הם משולשים חופפים, לפי אותו משפט חפיפה.
אך בסרטוט 2 שוות הזוויות B ו-D כי הן עומדות במקומות מתאימים זה לזה לפי סדר החפיפה, מול הצלעות השוות AE ו- CE (B מול AE ו-D מול CE)
ואילו בסרטוט 1 אין הזוויות B ו-D שוות זו לזו. בסרטוט זה הזווית D נמצאת במקום המתאים, לפי סדר החפיפה, לזווית A ולא לזווית B, ולכן היא שווה לזווית A הגדולה מהזווית B.

<table>
<tr>
<td>3. **חידת חפיפה למתקדמים:**
העתיקו כל אחת משלוש הצורות המצויירות כאן על נייר ונסו להוסיף לה קווים המחלקים אותה לשלושה משולשים החופפים זה לזה. אם נראה לכם שהצלחתם, גזרו ובדקו חפיפה על-ידי הנחת המשולשים זה על זה.
(הצורות צוירו באופן שאפשר לחלקן כמבוקש.)
</td>
<td></td>
</tr>
</table>

נושאים למתקדמים – דוגמאות

המחשבון ה"מקולקל" (6 שעות)

מטרות

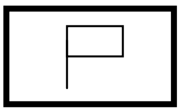
א. חזרה על תכונות פעולות החשבון
ב. שימוש לא פורמאלי בשיקולים אלגבריים
ג. העמקה בנושאים הנלמדים בכיתה
ד. טיפוח מיומנויות הכללה והנמקה
ה. טיפוח חשיבה יצירתית.

הנושאים	הבהרות ודוגמאות
א. יצירת מספרים ממספרים אחרים.	**מציגים מצב דמיוני, בו מציבים בפני התלמיד מחשבון שחלק מהמקשים שלו אינם פועלים. על התלמידים לעקוף את המגבלות הנובעות מכך, ולמצוא דרכים לקבל על צג המחשבון ה"מקולקל" מספרים מסוימים, או לחשב תוצאות של פעולות מסוימות. ניתן למצוא באינטרנט יישומונים (applets) המדמים מחשבונים בעלי מקשים בלתי תקינים (לא פעילים) לפי בחירת המשתמש.** **דוגמאות:** א. נתון מחשבון בו המקש המספרי התקין היחיד הוא $\boxed{2}$ ומקשי הפעולות היחידות התקינות הן החיבור וההעלאה בריבוע. קבלו על צג המחשבון את המספרים 24 ו-40.
ב. חישוב סכום ללא מקש החיבור	ב. נתון מחשבון בו המקש $\boxed{+}$ אינו תקין. חשבו בעזרתו את הסכום 7659 + 6581 **פתרון:**
ג. חישוב הפרש ללא מקש החיסור	ניתן להפעיל שיקולים אלגבריים לא פורמאליים, ולחשוב על האפשרות להכפיל פי שניים את המספר הראשון (מקש הכפל פעיל) ולהוריד ממנו את ההפרש בין שני המספרים (גם מקש החיסור פעיל) – בעצם התלמיד משתמש בתבנית 2a-(a-b), אך בונה אותה מתוך שיקולים מתמטיים כללים – ולא מתוך שימוש בחוקים לפישוט ביטויים אלגבריים, אשר טרם נלמדו. [בשלבים מתקדמים יותר של לימודי האלגברה, התלמידים יוכלו לבצע פעולות המתאימות לתבניות אחרות – כגון, $\frac{a^2-b^2}{a-b}$.]
ד. חישוב מכפלה וללא מקשי החיבור והכפל.	ג. נתון מחשבון בו מקשי פעולות החיבור והכפל אינם תקינים. חשבו בעזרתו את המכפלה 45 x 312 [כאן ניתן להשתמש בתבנית a ÷ (1 ÷ b)]

חבורות (12 שעות)

מטרות

א. חקירה לעומק של קבוצות מספרים ופעולות שנלמדו
ב. הסתכלות פורמאלית על מבנים מתמטיים
ג. טיפוח חשיבה מתמטית מופשטת
ד. טיפוח מיומנויות הכללה והנמקה
ה. הכרת פעולות בינאריות חדשות.

הנושאים	**הבהרות ודוגמאות**
א. חקר פעולות	**הגדרת פעולות שונות (למשל, הממוצע של שני מספרים, הסכום של המכפלה והסכום של שני מספרים, חיבור וקטורים בייצוג גראפי) וחקירתן:** • **מציאת תוצאת פעולה בין שני איברים נתונים** • **בניית לוח פעולה** • **פתרון "משוואה" (מציאת איבר על סמך איבר נתון ותוצאת פעולה)** • **קיום תכונות (למשל, סגירות, חלופיות, קיבוציות, איבר ניטראלי ואיבר הופכי).**
ב. טרנספורמציות גאומטריות כאיברי קבוצה תחת הפעולה של הרכבה	**הסתכלות על טרנספורמציות כאובייקטים, ועל הרכבת פונקציות כפעולה בין אובייקטים אלה.** **דוגמה:** בנו לוח לפעולת ההרכבה בין טרנספורמציות המעבירות מלבן על עצמו: שני סיבובים סביב מרכז המלבן ב-$180°$ וב-$360°$ ושני שיקופים לגבי ציר הסימטרייה האופקי והציר האנכי של המלבן. פעולת ההרכבה בין שתי טרנספורמציות מתבצעת על ידי הפעלת שתי הטרנספורמציות בזו אחר זו על המלבן, החל ממצבו המקורי. למעקב אחר התוצאות ציירו שני דגלים חופפים ובאותה תנוחה, משני צדדיו של נייר מלבני.  בדקו קיום תכונות הסגירות, האיבר הניטראלי והאיבר ההופכי של הפעולה לגבי קבוצת הטרנספורמציות האלה.

ג. מושג החבורה	• **הגדרת חבורה** • **קביעת קיום תנאי חבורה לגבי קבוצות ופעולות מוכרות מלימודים קודמים או לגבי קבוצות ופעולות שנחקרו במסגרת יחידה זאת.**
ד. חשבון מודולארי	• **הכרת תופעות המתנהגות לפי חשבון מודולארי (למשל, סיבוב במעגל המחולק למספר חלוקות, שעות היממה, ימי השבוע).** **דוגמה:** היום יום ג' 10.6.08. - באיזה יום בשבוע יחול 10.08.08? - באיזה יום בשבוע יחול 10.6.16? • **הכרת הסימון a (mod b).** • **חישובים מודולאריים ובניית לוחות פעולה של כפל או חיבור לפי מודולו נתון.** • **פתרון משוואות מודולאריות.** **דוגמאות:** $3 + x = 4 \pmod 5$ $2x = 2 \pmod 4$ $x^2 = 1 \pmod 5$

הצפנה (קריפטוגרפיה) (10 שעות)

מטרות

א. הכרות עם שיטות הצפנה שונות לאורך ההיסטוריה

ב. שימוש בנושאים מתמטיים (שכיחות יחסית, אריתמטיקה מודולארית,הסתברות) לצורך פענוח

ג. הדגמה של שימוש במתמטיקה בנושא המעורר עניין

ד. שימוש בנושא החשבון המודולארי

ה. הכרות עם נושא מתמטי שימושי, העומד בחזית המחקר המדעי, באמצעות דוגמאות פשוטות ונגישות לידע של תלמידי חטיבת הביניים.

הנושאים	הבהרות ודוגמאות
א. מבוא: **הצפנה מהי ולשם מה? מה כרוך בשבירה מוצלחת של שיטת הצפנה?**	• **מושגי יסוד בהצפנה (טקסט מקור, טקסט מוצפן, אלגוריתם הצפנה, פענוח)** • **שלוש קבוצות עיקריות של דרכי הצפנה - הסתרת מידע (דוגמה א); העברה (דוגמה ב) והחלפה (דוגמה ג).** **דוגמאות:** א. לפניכם טקסט מוצפן. א-ב-ני-בי או-בו-ה-ב-ב או–בו–ת-ב-ך התוכלו לגלות את הטקסט המקורי? במילים אחרות, התוכלו לפענח את הטקסט המוצפן? ב. לפניכם טקסט מוצפן. נטתיפ צקימי פסבוש יטהנו נדבשר ארטלו תכוחת הכרל. במקרה זה, ההודעה המוצפנת נרשמה בטורים מלמעלה למטה ומימין לשמאל, ונשלחה כאשר היא נרשמת לפי שורות, בקבוצות של חמש אותיות. ג. קוד מורס.
ב. הצפנה בעזרת הזזה קבועה.	• **הצפנת קיסר (הזזה ב 3 מקומות) כדוגמה להצפנה בשיטת הזזה קבועה** • **חיבור מודולו 22, כפל מודולו 22, ושימוש בשתי הפעולות (חיבור וכפל מודולו 22) להצפנה ופענוח – יתרונות וחסרונות.**

ג. הצפנה בעזרת טרנספורמציות אפיניות (affine transformations)	• **הרכבת פונקציות – כפל מודולו 22 ואחריו חיבור מודולו 22 (ראו דוגמה).** • **בחינת מספר האפשרויות.** • **ניתוח שיטות הפענוח.** **דוגמה:** הצפנת אפינית [11 , 7]. טקסט מקור: צפנת פענח הצפנה לפי כפל מודולו 7: עטית טביל הצפנה לפי חיבור מודולו 11: הרשכ רמשא כלומר, הטקסט המוצפן המתקבל בסוף התהליך הוא בהרשכ רמשא.
ד. הצפנה ופענוח הצפנה בעזרת מילת מפתח	• **מהי שכיחות יחסית? כיצד ניתן לחשב שכיחות יחסית?** • **הסבר והדגמת ההצפנה, חישוב מורכבות הפענוח.** • **פענוח תוך שימוש בטבלת שכיחויות יחסיות של האותיות בשפה.**
ה. הצפנת ופענוח לפי שיטת ויגנר	• **חישוב ההסתברות להופעת כל אות בשפה בטקסט בעל משמעות, חישוב ההסתברות להופעת זוג אותיות זהות במקומות סמוכים בטקסט בעל משמעות, הפעלת החישוב על טקסט מוצפן לצורך גילוי אורך מפתח ההצפנה.** • **הסבר והדגמת ההצפנה, חישוב מורכבות הפענוח.** • **פענוח הצפנה בשיטת ויגנר.**
ו. הצפנה בשיטת RSA – הצצה	• **הסבר של עקרונות שיטת ההצפנה הנמצאת כיום בשימוש במחשבים בכל העולם, תוך השענות על דוגמה.**