תכנית הלימודים לכיתה ח

לתלמידים מתקדמים ומתעניינים כוללת התכנית תוספת של תכנים משני סוגים:

א. פרקים עצמאיים בהיקף של 4 עד 10 שעות. דוגמאות לפרקים כאלה מופיעות בסוף התכנית.

ב. פרקונים קצרים בהיקף של כשיעור. דוגמאות לפרקונים כאלה מופיעות (עם רקע) בצמוד לנושאים בתכנית כהרחבה והעמקה.

תחום מספרי	**תחום אלגברי**	**תחום גאומטרי**
1. יחס בין מספרים, יחס ישר, פרופורציה, יחס הפוך, קנה מידה. (14 שעות)	**1. פונקציה קווית** **f(x) = ax + b** (14 שעות)	**1. דמיון משולשים ומצולעים** (6 שעות)

תחום מספרי: 1. יחס בין מספרים, יחס ישר, פרופורציה, יחס הפוך, קנה מידה.

נושאי לימוד	**הבהרות ודוגמאות**
א. יחס ישר	**יחס משמש להשוואה בין שני גדלים.** **יחס קוראים משמאל לימין. לדוגמה: את היחס 4 : 3 קוראים (כמו כל ביטוי מתמטי) משמאל לימין: 3 ל- 4.** **אם היחס בין מספר הבנים בכיתה למספר הבנות הוא 4 : 3 אז ניתן לחלק את הכיתה לשביעיות באופן שבכל קבוצה של 7 תלמידים, 3 הם בנים ו- 4 הן בנות. מכאן נובע שהבנים מהווים $\frac{3}{7}$ של תלמידי הכיתה והבנות מהוות $\frac{4}{7}$ של הכיתה.** **ניתן גם לחלק את הכיתה ל- 7 קבוצות שוות בגודלן שמהן שלוש הן של בנים וארבע של בנות.** **יחס ישר: נתונים שני גדלים. גודל א וגודל ב. בין שני גדלים מתקיים יחס ישר אם כאשר גודל א גדל (קטן) פי מספר מסוים גם גודל ב גדל (קטן) פי אותו המספר.**

• **מציאת יחס**	• כתיבת יחסים והבנת תכונות של יחס. **דוגמאות:** 1. בשבט של הצופים לכל 10 חניכים יש 2 מדריכים. א. מהו היחס בין מספר המדריכים לבין מספר החניכים? ב. מהו היחס בין מספר החניכים לבין מספר המדריכים? 2. א. היחס בין אורכי הניצבים במשולש ישר זווית הוא 3:5. מאריכים כל צלע פי 2. האם משתנה היחס בין אורכי הניצבים? אם לא – מדוע? אם כן, כתבו את היחס החדש. ב. אורכי הניצבים במשולש ישר זווית הם 6 ס"מ ו- 8 ס"מ. מהו היחס בין הניצבים? מאריכים כל צלע ב- 2 ס"מ. האם משתנה היחס בין אורכי הניצבים? אם לא – מדוע? אם כן, רשמו את היחס החדש.
• **חלוקה ביחס נתון**	**חלוקה ביחס נתון תודגם במקרה בו ניתן לבצע בפועל את החלוקה. פתירת בעיות פשוטות של חלוקה ביחס תוביל למסקנה, שחלוקת כמות ביחס 4:5, למשל, פירושה חלוקת הכמות כולה ל-2 חלקים: $\frac{4}{9}$ מהכמות ו- $\frac{5}{9}$ מהכמות.** **דרך חלוקה זו תקפה גם לכמות רציפה.** **דוגמאות:** 1. חלקו 18 כדורי משחק לשתי קבוצות של ילדים ביחס של 4:5. 2. חילקו 56 גולות בין אורי ודן ביחס של 5 : 2 אילו היגדים מהבאים מתאימים לבעיה: א. על כל 2 גולות שיש לאורי יש לדן 5 גולות. ב. לאורי $\frac{2}{5}$ מסך כל הגולות שיש לשניהם. ג. אורי יקבל $\frac{2}{7}$ של הגולות, ודן יקבל $\frac{5}{7}$ של הגולות. ד. מכל 7 גולות לאורי 2 גולות ולדן 5 גולות. ה. מכל 7 גולות לדן 2 גולות ולאורי 5 גולות. ו. היחס בין מספר הגולות של אורי לבין מספר הגולות של דן הוא 10 : 4. 3. שותף אחד השקיע בעסקה 2,000 ש"ח וחברו השקיע 3,000 ש"ח. הוסכם ביניהם שהרווח יחולק ביניהם לפי יחס ההשקעות. איך יחלקו ביניהם רווח של 1,200 ש"ח?

ב. פרופורציה • **פרופורציה- שוויון בין יחסים**	**דוגמה:** באולם רקפת 35 שולחנות ו- 350 כסאות. א. מהו היחס בין מספר השולחנות למספר הכסאות? ב. באולם כלנית 40 שולחנות ו- 400 כסאות. האם היחס בין מספר השולחנות למספר הכסאות באולם כלנית שווה ליחס בין מספר השולחנות למספר הכסאות באולם רקפת?
• **מציאת המספר החסר בפרופורציה**	• מציאת המספר החסר בפרופורציה על ידי משוואות מהסוג: $\frac{x}{a}=\frac{b}{c}$, $\frac{a}{x}=\frac{b}{c}$ כאשר a, b, c – מספרים, x – משתנה, שונים מ- 0 **דוגמאות:** 1. בכד יש 4 כוסות מים ו- $\frac{1}{2}$ כוס סוכר. כדי לשמור על אותה מתיקות של המשקה, כמה סוכר נשים בכד קטן יותר שמכיל 3 כוסות מים? 2. משקל סמ"ק זהב הוא 19.32 גרם ומשקל סמ"ק כסף הוא 10.5 גרם. בכף אחת של המאזניים מונחים 3 סמ"ק זהב, כמה סמ"ק כסף מונחים על הכף השנייה אם המאזניים יהיו מאוזנים? עגלו את התשובה עד שני מקומות מימין לנקודה העשרונית. 3. היקף מלבן הוא 64 ס"מ. היחס בין צלעותיו הוא 3:5. מהם אורכי הצלעות של המלבן?
ג. יחס הפוך	**יחס הפוך: נתונים שני גדלים. גודל א וגודל ב. בין שני הגדלים מתקיים יחס הפוך אם כאשר גודל א גדל (קטן) פי מספר מסוים, גודל ב קטן (גדל) פי אותו המספר.** **הערה:** הגדלים שבנוסח זה אינם מספרים בודדים אלא משתנים עם קשר פונקציוני, והמונחים "יחס ישר" ו-"יחס הפוך" מתארים תכונות של קשרים כאלה. **דוגמאות:** 1. יואב ויאיר יצאו מ**ארזים** לעבר **אשלים**. יואב צועד ברגל במשך 9 שעות, יאיר רוכב על אופניו במשך 3 שעות. פי כמה מהירותו של יאיר גדולה ממהירותו של יואב? 2. אדם אחד מכניס 200 מכתבים למעטפות במשך שעה אחת. א. בכמה זמן יכניסו 4 אנשים העובדים באותו הקצב 200 מכתבים למעטפות? ב. בכמה זמן יכניסו 6 אנשים העובדים באותו הקצב 200 מכתבים למעטפות? ג. בכמה זמן יכניסו 10 אנשים העובדים באותו הקצב 200 מכתבים למעטפות?
• **ייצוג גרפי של פונקציה המייצגת יחס ישר**	**הפונקציה y = ax מייצגת יחס ישר בין שני גדלים משתנים: כאשר x גדל פי מספר k כלשהו, גדל y פי אותו המספר k.**

• **ייצוג גרפי של פונקציה המייצגת יחס הפוך**	**הפונקציה** $y=\frac{k}{x}$ **מייצגת יחס הפוך:** **הקשר בין ערכי x ו- y הוא כזה שמכפלתם קבועה ואינה 0 , xy=k עם** $k\neq 0$**.** • ייצוג גרפי של פונקציה המתארת יחס ישר ופונקציה המתארת יחס הפוך **דוגמאות:** 1. סרטטו גרף שעובר דרך נקודות ששיעור ה – y שלהן גדול פי 2 משיעור ה - x . כתבו ביטוי של פונקציה שזה הגרף שלה. 2. הציגו באופן גרפי את הפונקציה: $y=\frac{5}{x}$ היעזרו בטבלת ערכים. כיצד תיראה הפונקציה $y=\frac{12}{x}$? (היעזרו בתכנת מחשב) 3. א. כתבו מספר זוגות (x,y) שמקיימים את היחס: $\frac{y}{x}=\frac{3}{6}$ ב. סמנו את הנקודות המתאימות במערכת צירים. נסו לסרטט את הקו שיעבור דרך נקודות אלה. ג. כתבו מספר זוגות (x,y) שמקיימים את היחס: $\frac{y}{6}=\frac{3}{x}$. ד. סמנו את הנקודות המתאימות במערכת צירים. נסו לסרטט את הקו שיעבור דרך נקודות אלה. השוו בין שני הקווים. **שאלה לדיון בנושא יחס:** שתי חברות רצו לקנות ספרים במבצע בחנות ספרים. המבצע הוא **קנה שלושה ספרים ושלם רק על שניים** (הספר הזול מהשלושה הוא בחינם). רותי ורינה בחרו לקנות ביחד שלושה ספרים ולהתחלק בהנחה. רותי בחרה שני ספרים במחיר 57 ₪ ו 33 ₪ כל אחד ורינה בחרה ספר במחיר 45 ש"ח. הציעו דרך סבירה לחלוקת הכסף שנחסך על ידי שתי החברות (דרך שתיראה הוגנת בעיני שתיהן).
ד. קנה מידה • **מדידות ויחידות מידה, מעבר בין יחידות מידה**	**מציאת קנה מידה על פי מידות בסרטוט ובמציאות, מציאת גודל במציאות (בסרטוט) על פי קנה המידה והגודל בסרטוט (במציאות). סרטוט פשוט על פי קנה מידה.** **דוגמאות:** 1. במוזיאון מוצג מודל כדור הארץ. הקוטר של כדור הארץ במודל שווה למטר אחד.

במציאות קוטר כדור הארץ הוא כ- 12,500 ק"מ.

א. מהו קנה המידה של המודל?

ב. מהו היקף כדור הארץ במציאות ובמודל?

ג. מהו אורך הגבול של מדינה מסוימת במודל, אם אורך הגבול שלה במציאות הוא כ- 1,000 ק"מ?

ד. כתבו ביטוי שלפיו אפשר למצוא אורך הגבול של מדינה כלשהי במודל הזה, אם ידוע אורך הגבול שלה במציאות.

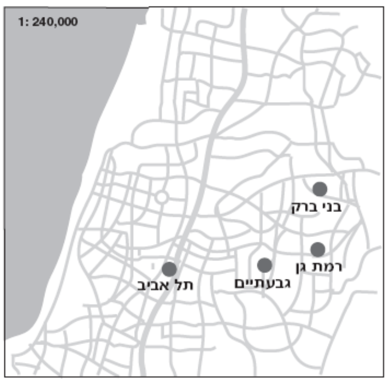
2. בנימין גר בבני ברק, רינה ברמת גן, גדעון בגבעתיים ותמר גרה בתל אביב. בתיהם במרכזי הנקודות המסומנות במפה.

מהו המרחק בקו אווירי,

א. מביתו של בנימין לביתה של תמר?

ב. מביתו של גדעון לביתה של תמר?

ג. מביתה של רינה לביתו של גדעון?



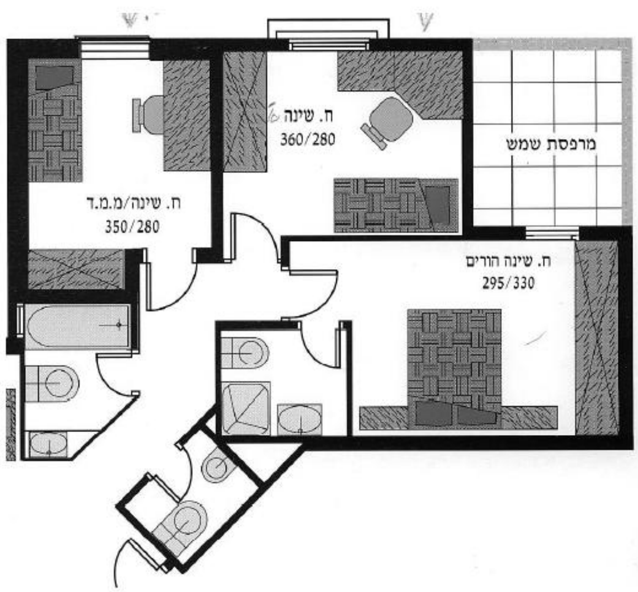
3. הסרטוט שלפניכם הוא תכנית של דירה, ענו על השאלות על פי הסרטוט.

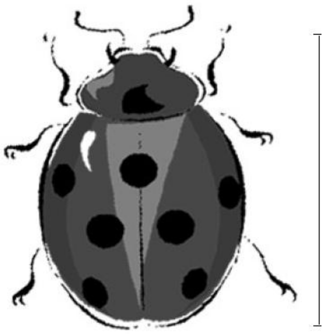
א. מהו אורך חדר השינה המרכזי בסרטוט?

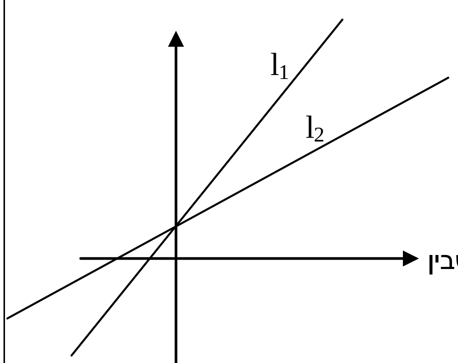
ב. מהו רוחב חדר השינה המרכזי בסרטוט?

ג. מהו שטח חדר השינה המרכזי בסרטוט?

ד. מהו קנה המידה של התכנית?



	4. לפניכם תמונה **מוגדלת** של חיפושית. אורך גוף החיפושית במציאות הוא 0.6 ס"מ ובסרטוט הוא 6 ס"מ. א. מהו היחס בין אורך החיפושית בתמונה המוגדלת לאורך החיפושית במציאות? ב. מהו קנה המידה שבו מסורטטת החיפושית?  6 ס"מ. **שימו לב**: בכתיבת קנה מידה נמדדים שני האגפים באותה יחידת מידה. אם כל שני ס"מ במפה מיצגים קילומטר אחד ייכתב קנה המידה בצורה 1:50,000 .

תחום אלגברי: 1. פונקציה קווית f(x) = ax + b	
נושאי לימוד	**הבהרות ודוגמאות**
פונקציה קווית **f(x) = ax + b** • **מושג השיפוע**	**היכרות עם מושג השיפוע תיעשה בדרך הסתכלותית.** **דוגמה:** 1. א. לישר l_1 יש שיפוע גדול יותר מלישר l_2. ב. ניתן למצוא את השיפועים של הישרים על ידי בניית "מדרגות" שרוחבן יחידת אורך אחת. ג. נכליל ונמצא את השיפוע על ידי היחס שבין ההתקדמות לאורך ציר ה- y לבין ההתקדמות לאורך ציר ה- x. ד. לישרים מקבילים אותו שיפוע. 

- **תפקידי הפרמטרים בייצוגים שונים של פונקציה קווית (מספרי, גרפי, אלגברי).**

- פעילויות שבהן התלמיד יקשר בין הייצוגים השונים של הפונקציה הקווית.

דוגמאות:

1. נתונה הפונקציה: $y = 2x + 4$

א. בנו טבלת ערכים המתאימה לפונקציה.

ב. סמנו את הנקודות שבטבלה במערכת צירים וחברו אותן על ידי קו ישר.

ג. מצאו את שיפוע הקו הישר.

ד. מצאו את נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה – y.

- לאחר מספר תרגילים, נקשר בין השיפוע ונקודת החיתוך עם ציר ה – y לבין הפרמטרים של הפונקציה.

2. לפניכם הצגה של פונקציה קווית בצורת טבלת ערכים חלקית:

x	f(x)
1	4
2	7
3	10
4	13
5	16
6	19
7	22
.	.
.	.
.	.

כתבו את הביטוי המייצג את הפונקציה הקווית: ______________

בהמשך יינתנו טבלאות ובהן גם מספרים שליליים, שברים פשוטים ומספרים עשרוניים וכן טבלאות שבהן קפיצות לא אחידות.

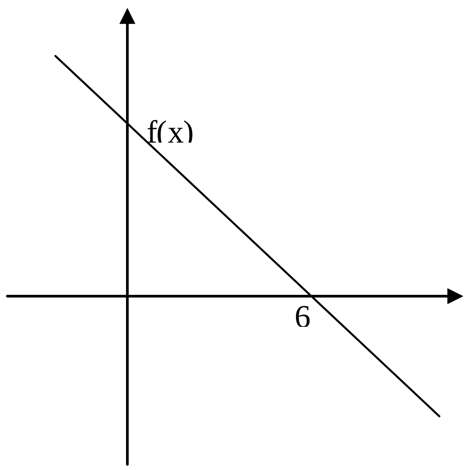
- **מציאת שיפוע על פי שתי נקודות ומציאת משוואת ישר על פי שיפוע ונקודה.**

דוגמאות:

1. מצאו את שיפוע הישר העובר דרך שתי הנקודות (1, -2), (3, 2).
2. מצאו את משוואת הישר העובר דרך הנקודה (3,5) ומקביל לישר העובר דרך הנקודות (2,4) ו- (3,6.5).

- **תחום חיוביות ותחום שליליות של פונקציה קווית**

הפונקציה $f(x)$ שבסרטוט (הקו הישר) חותכת את ציר ה - x בנקודה $(6,0)$. ומקבלת ערכים חיוביים עבור $x < 6$ וערכים שליליים עבור $x > 6$.



דוגמה:

נתונה הפונקציה: $y = -3x + 6$

א. בנו טבלת ערכים המתאימה לפונקציה.

ב. סמנו את הנקודות שבטבלה במערכת צירים וחברו אותן על ידי קו ישר.

ג. מצאו את נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה – y.

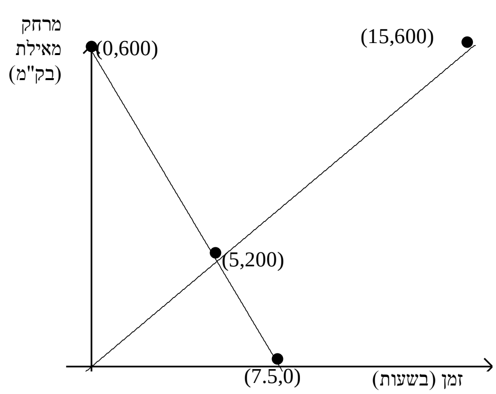
ד. מצאו את נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה – x.

ה. מצאו עבור אלו ערכי x הפונקציה מקבלת ערכים חיוביים, ועבור אלו ערכי x ערכיה שליליים.

- **ייצוג תופעות בעזרת פונקציות קוויות ופתרון בעיות המתארות תהליכי השתנות**

דוגמאות:

1. בשעה שש בבוקר יצא חיים במשאית טעונה מנמל אילת לקריית שמונה (מרחק של כ-600 ק"מ). באותה שעה החל יניב לנסוע מקריית שמונה לאילת במשאית ריקה. יניב התבקש למסור לחיים חבילה כאשר ייפגשו בדרך. האיור מציג גרפים המתארים את המיקום של שני הנהגים במהלך הנסיעה.



א. גרף מסומנות ארבע נקודות. כתבו על המשמעות של כל אחת מהן בסיפור, ועל מידע נוסף שאפשר ללמוד על הסיפור מקריאת שיעורי הנקודות הללו.

ב. מהי מהירות הנסיעה של משאית ריקה? של משאית עם מטען?

ג. מתי ובאיזה מרחק מאילת נפגשו המשאיות?

ד. כתבו ביטויים של שתי הפונקציות הקוויות המופיעות בסרטוט. איזה מידע על תנועה של כל אחת מהמשאיות נותנת כל פונקציה?

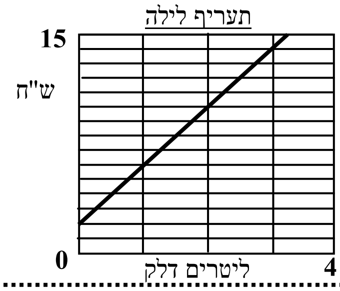
2. **תעריפי דלק:** בתחנת דלק קיימים שלושה תעריפים שונים: תעריף יום, תעריף ערב ותעריף לילה. כל אחד מהתעריפים מוצג בצורה שונה:

תעריף יום
מחיר לליטר דלק
3.5 ש"ח

תעריף ערב

עלות הדלק	כמות הדלק
0	0
8	2
16	4
24	6
32	8

תעריף לילה



א. מה דומה ומה שונה בתעריפים השונים?

ב. סכמו ותארו בייצוג אחד את תעריפי הדלק בתחנה זו.

3. הדס בודקת תעריפי שכירות רכב בשלוש חברות שונות.

חברה א' גובה 600 שקלים לשבוע ללא התחשבות במספר הקילומטרים שנסעו.

חברה ב' גובה סכום של 150 ₪ לשבוע דמי שכירות וחצי שקל לכל ק"מ שהמכונית נוסעת (עבור חלקי קילומטר משלמים את החלק היחסי).

חברה ג' גובה 200 ₪ דמי שכירות ו 40 אגורות לכל ק"מ נסיעה (עבור חלקי קילומטר משלמים את החלק היחסי).

א. הציגו את התעריפים בייצוגים שונים (כלל התאמה, טבלת ערכים, גרף).

ב. באיזו חברה הייתם בוחרים אם הייתם רוצים לנסוע למרחק של 1,000 ק"מ? 500 ק"מ?

האם יש מרחק-נסיעה שבו משלמים אותו סכום בשתי חברות שונות?

- **משוואות קוויות ואי שוויונות**

דוגמאות:

ו. נתונות הפונקציות:

f(x) = – 2x + 3

$g(x) = 3x - 7$

א. מצאו את הנקודה שבה $f(x) = 0$.

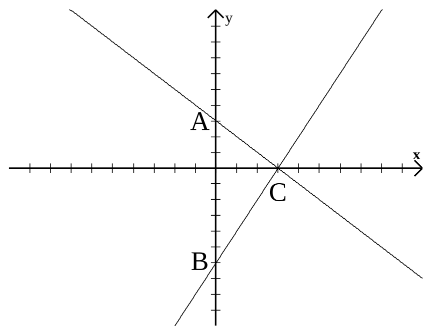
ב. מצאו את התחום שבו $f(x) < 0$.

ג. מצאו את הנקודה שבה $f(x) = g(x)$.

ד. באיזה תחום $f(x) > g(x)$?

- חישובי אורכים של קטעים המקבילים לצירים וחישובי שטחים:

נתונות הפונקציות: $f(x) = 2x - 12$, $g(x) = -x + 6$

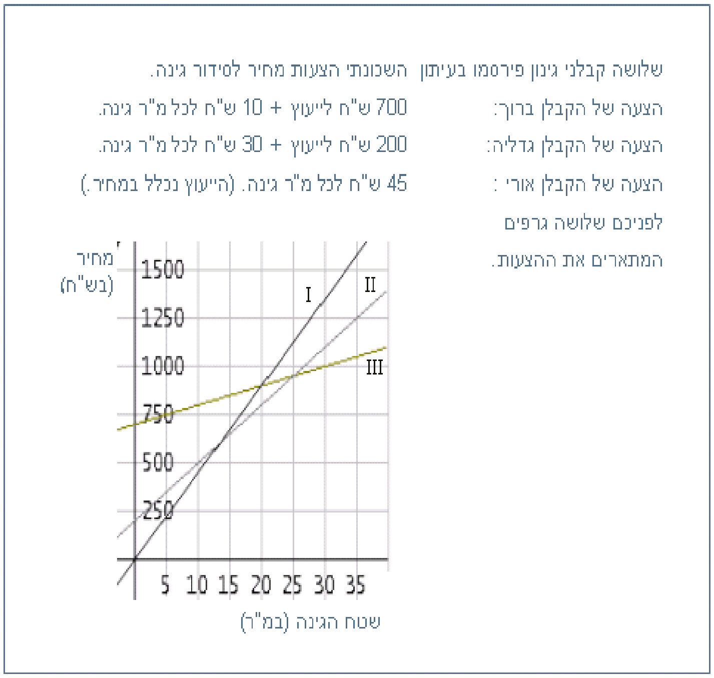


א. מצאו את שיעורי הנקודות: A, B, C

ב. מצאו את שטח המשולש ABC.

ג. חשבו את אורכי הצלעות AC ו- BC. עגלו את התשובה לשתי ספרות אחר הנקודה העשרונית. שימו לב, יש להשתמש במשפט פיתגורס ולכן אפשר לענות לשאלה זו רק אחרי לימוד המשפט.

שאלות משלבות (אורייניות): קבלני גינון



א. כתבו על כל גרף את שם הקבלן המתאים.

ב. מהו שטח הגינה שעבורו לוקחים הקבלנים אורי וגדליה אותו מחיר?
מהו המחיר המתאים למקרה זה?

ג. למשפחת ישראלי גינה ששטחה 100 מ"ר. גברת ישראלי רצתה להזמין את הקבלן שהצעתו היקרה ביותר, כי היא טענה שהוא גם הטוב ביותר. מר ישראלי עמד על כך שיזמינו את הקבלן הזול ביותר, כי ממילא הם מתכוונים לעבור דירה בקרוב. לבסוף נעתרה גברת ישראלי לבקשת בעלה. כמה כסף חסכה משפחת ישראלי בהחלטה זו? הסבירו.

ד. למשפחת מזרחי יש שטח אדמה גדול, אולם התקציב שלהם לסידור גינה הוא 1500 שקלים. איזה קבלן יוכל לסדר להם גינה בשטח גדול ככל האפשר? מהו שטח זה? הסבירו.

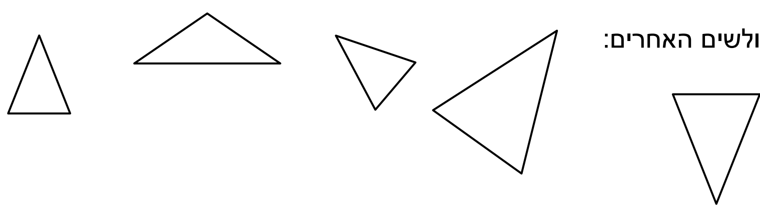
ה. גברת ירדני החליטה לקחת את ההצעה הזולה ביותר עבורה, ולכן היא הזמינה את הקבלן גדליה לסדר לה את הגינה. מה תוכלו לומר על שטח הגינה של גברת ירדני?

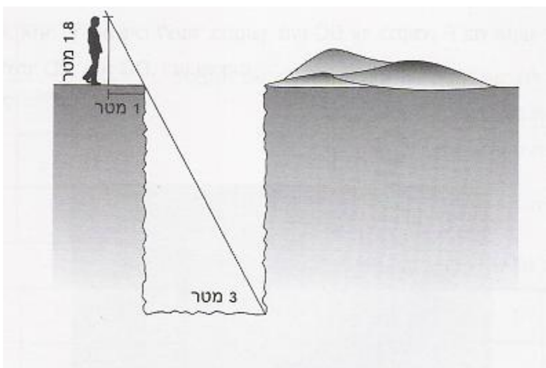
ו. האם יש שטח גינה שעבורו שלושת הקבלנים יגבו אותו מחיר? הסבירו.

ז. במרכז כיכר עירונית יש גינה עגולה שרדיוסה 2.5 מ'. העיריה רוצה לבחור בגנן שהצעת המחיר שלו היא הזולה ביותר. באיזה גנן תבחר?

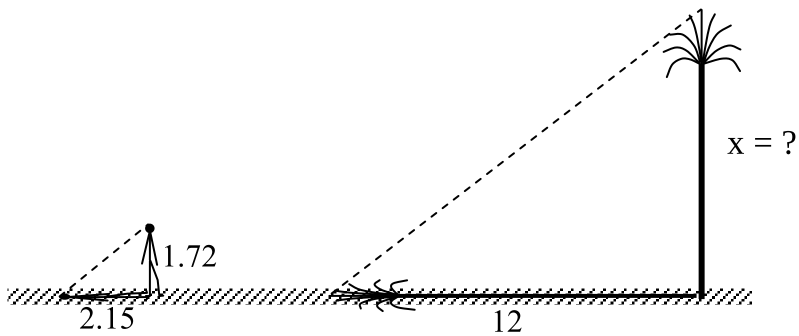
ח. שטחן של רוב הגינות באזור מעל 25 מ"ר. קבלן הגינות דוד רוצה להתחרות בשלושת הקבלנים הקיימים ולפרסם מחיר קבוע ללא התחשבות בשטח הגינה. הוא מתכוון להציע מחיר כזה שיהיה כדאי לתושבי האזור להזמין אותו.
עזרו לו לחשוב על מחיר מתאים, ורשמו את שיקוליכם בקביעת המחיר.

תחום גאומטרי: 1. דמיון משולשים ומצולעים

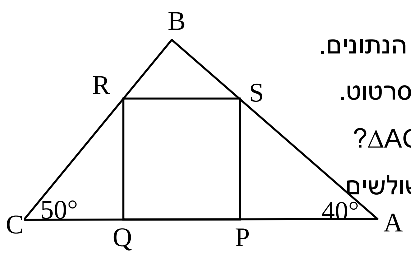
נושאי לימוד	**הבהרות ודוגמאות**
דמיון משולשים • **הגדרה:** **משולשים דומים הם משולשים שבהם שוות כל הזוויות בהתאמה וקיים אותו יחס בין כל שתי צלעות מתאימות. יחס זה נקרא יחס הדמיון.** • **סימון של משולשים דומים**	**נושא הדמיון משמש גם כיישום של יחס ופרופורציה.** **דמיון משולשים יוצג תחילה בדרך אינטואיטיבית: הגדלה או הקטנה של מצולע בעזרת זכוכית מגדלת או מקטנת, או בצילום או במעבד תמלילים WORD תוך לחיצה על המקש shift וגרירת פינה, נותנת מצולע שזוויותיו נשמרות ללא שינוי וצלעותיו גדלו או קטנו פי אותו מספר. המצולע המקורי והמצולעים המתקבלים ממנו בדרך זו נקראים דומים.** **דוגמה:** בסרטוט משולש אחד יוצא דופן, הסבירו מדוע הוא יוצא דופן ומה משותף ולכל המשולשים האחרים:  • **דוגמה** לפעילות אינטואיטיבית שתוביל להגדרה של משולשים דומים ולחלק מתכונותיהם. הפעילות כוללת בניית משולש מ- 4 עותקים של משולש נתון שונה צלעות, מ - 9 ומ- 16 עותקים של משולש נתון. (פירוט הפעילות מופיע בנספח). כמסקנה מפעילות זו נקבל את שוויון הזוויות, את שוויון יחסי הצלעות ואת יחסי השטחים שבין המשולש הנתון לבין המשולשים המתקבלים מאותו משולש בבניות שתיארנו. **סימן הדמיון** **רצוי לרשום את שמות המשולשים הדומים לפי סדר הדמיון.**

• **תכונה של משולשים דומים:** **במשולשים דומים יחס השטחים הוא ריבוע יחס הצלעות המתאימות.**	**התכונה תתקבל מהפעילות ולא נוכיח אותה כאן.**
• **טענה:** **אם לשני משולשים זוויות שוות בהתאמה, אז צלעותיהם פרופורציוניות, ולכן המשולשים דומים.** **(טענה דומה אינה תקפה במרובעים וכד'.)**	**לא נוכיח את הטענה כאן.** **בתרגילי החישוב הבאים נשתמש בטענה זו.** • תרגול בנושא הדמיון יכלול זיהוי של משולשים דומים וכן מציאה של אחד הגדלים החסרים. **דוגמאות:** 1.חשבו את עומק הבור שבסרטוט. 

2.אדם שגבהו 1.72 מטר עמד בשמש ליד דקל. אורך צילו של האדם היה 2.15 מטר ואורך צילו של הדקל באותו זמן היה 12 מטר. מה גובה הדקל? (קרני השמש יוצרות אותה זווית עם הדקל ועם האדם)



3.במשולש ABC חסום ריבוע PQRS.



א. חשבו את כל הזוויות שבסרטוט על סמך הנתונים.

ב. רשמו את כל המשולשים ישרי הזווית שבסרטוט.

ג. אילו מבין המשולשים האלה דומים ל- ΔACB?

ד. מדדו וחשבו את היחס שבין הצלעות במשולשים הדומים.

ה. האם בין המשולשים האלה, יש משולשים החופפים זה לזה?

- **דמיון מצולעים**

הגדרה:

שני מצולעים נקראים דומים אם הזוויות שלהם שוות בהתאמה והיחסים בין כל זוג של צלעות מתאימות שווים זה לזה.

בשונה מהמשולשים, שוויון זוויות במצולעים איננו מבטיח את הפרופורציה של הצלעות.

דוגמה:

ריבוע ומלבן שאינו ריבוע.

תחום מספרי	תחום אלגברי	תחום גאומטרי
2. סטטיסטיקה תיאורית (8 שעות)	**2. פתרון משוואות ליניאריות ופתרון שאלות מילוליות המובילות למשוואות ליניאריות** (22 שעות)	**2. משפט פיתגורס** (6 שעות)

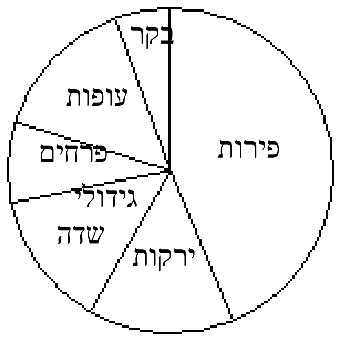
תחום מספרי: 2. סטטיסטיקה תיאורית

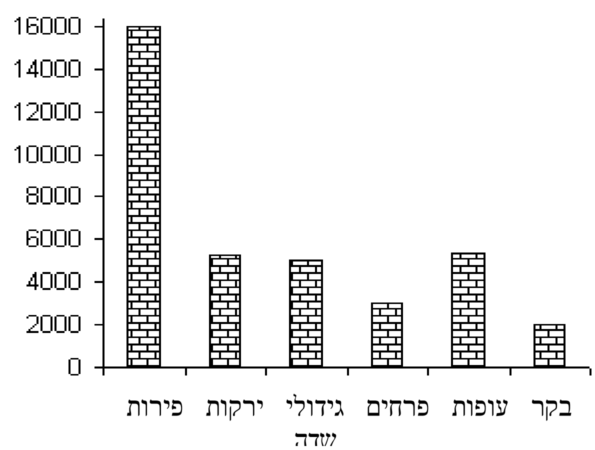
נושאי לימוד	הבהרות ודוגמאות
סטטיסטיקה תיאורית • **איסוף וארגון נתונים בדרכי ייצוג שונות: גרפית, טבלה, דיאגרמת עמודות דיאגרמת עוגה.**	• איסוף נתונים והשוואתם **דוגמאות:** 1. האותיות מ' , ל". בחרו עמוד כלשהו בספר כלשהו. ספרו את ההופעות של האות מ' ומצאו כמה אחוזים מהופעות אלה הם בתחילת מילה, כמה בתוך המילה וכמה בסוף המילה (בצורה ם). עשו זאת שוב עם האות ל". התוכלו להסביר את הסיבה להבדלים?

2. ענפים חקלאיים (השוואת דיאגרמות):

לפניכם טבלה המפרטת את מספרי המשקים העוסקים בענפים החקלאיים העיקריים בארץ בשנה מסוימת (משק העוסק בשני ענפים נספר פעמיים, לשם הפשטות אין הבדלה בין משק גדול לבין משק קטן). לצידה דיאגרמת- עוגה ואחריה דיאגרמת- עמודים בשביל הנתונים שבטבלה.

ענף חקלאי	מספר המשקים	אחוז
פירות	16000	
ירקות	5300	
גידולי שדה	5000	
פרחים	3000	
עופות	5400	
בקר	2000	
ס"ה	36700	%100





א. השלימו את מספרי האחוזים בטבלה.

ב. איזו דיאגרמה מראה ביתר בהירות את חלקו היחסי של כל ענף בתוך כלל המשקים החקלאיים?

ג. איזו דיאגרמה מראה ביתר בהירות כמה משקים בכל ענף?

ד. אפשר לשאול גם את השאלה הבאה: מהדיאגרמות, בעזרת הערכה גסה על דבר צריכת מוצרי חקלאות שונים במשפחה רגילה, ניתן להסיק שהארץ מייצאת פירות ופרחים לחו"ל. באיזו משתי הדיאגרמות יותר קל להסתייע להסקת מסקנה זאת? (התשובה אינה חד משמעית)

- **שכיחות יחסית והקשר להסתברות**

דוגמה:

קובייה (הסתברות)

ילדים הטילו קובייה מספר רב של פעמים. על כל פאה שלה היה רשום אחד מהמספרים 1, 2, 3 או 4, אך לא ידוע על כמה פאות היה רשום כל מספר.
לפניכם טבלה המציגה את אחוז הפעמים שהקובייה הראתה כל מספר.

המספרים	שכיחות יחסית באחוזים
1	32%
2	18%
3	35%
4	15%

שערו על כמה פאות מופיע כל אחד מארבעת המספרים?

- **טווח נתונים**

מדדי מרכז: ממוצע, חציון, שכיח.

הבנת המושגים והשימוש בהם. חישוב הממוצע.

הכרת תכונות הממוצע:

א. סכום הסטיות מהממוצע שווה לאפס.

ב. הממוצע אינו חייב להיות ערך אפשרי של הנתונים.

ג. הגדלת כל המספרים בקבוע מעלה את הממוצע באותו קבוע.

ד. כפל כל המספרים בקבוע מכפיל את הממוצע באותו קבוע.

דוגמאות:

1. ציוניה של אפרת במתמטיקה במחצית היו: 90, 67, 86, 72. המורה החליט לבחור את שלושה הציונים הטובים מבין הארבעה ועל פי הממוצע לתת לאפרת ציון בתעודה. מה הציון שקבלה אפרת?
2. בכיתה ח1 בדקו את הציון במתמטיקה בתעודות והתקבלו התוצאות הבאות:

ציון	4	5	6	7	8	9	10
מספר תלמידים	1	1	4	10	5	3	1

א. כמה תלמידים בכיתה?

ב. כמה תלמידים קבלו ציון 6?

ג. מה השכיחות היחסית של תלמידים שקיבלו ציון 6?

ד. כמה תלמידים קיבלו מעל 8?

ה. מה השכיחות היחסית של תלמידים שקיבלו ציון גבוה מ- 8?
ו. מהו הציון השכיח?
ז. כמה תלמידים קיבלו ציון עובר (6 ומעלה)?
ח. איזה אחוז מהתלמידים קבלו ציון עובר (6 ומעלה)?
ט. מה ההסתברות שאם נבחר תלמיד באקראי הוא יקבל את הציון 7?
י. מה הציון הממוצע של תלמידי הכיתה במתמטיקה?
יא. מה הציון החציוני של תלמידי הכיתה במתמטיקה?

- התייחסות איכותנית לצורת ההתפלגות

3. בכיתה ח2 בדקו את הציון במתמטיקה בתעודות והתקבלו התוצאות הבאות:

ציון	4	5	6	7	8	9	10
מספר תלמידים	6	4	2	1	3	3	6

א. כמה תלמידים בכיתה?
ב. כמה תלמידים קבלו ציון 6?
ג. מה השכיחות היחסית של תלמידים שקיבלו ציון 6?
ד. כמה תלמידים קיבלו מעל 8?
ה. מה השכיחות היחסית של תלמידים שקיבלו ציון גבוה מ- 8?
ו. כמה תלמידים קיבלו ציון עובר (6 ומעלה)?
ז. איזה אחוז מהתלמידים קבלו ציון עובר (6 ומעלה)?
ח. מה ההסתברות שאם נבחר תלמיד באקראי הוא יקבל את הציון 7?
ט. מה הציון הממוצע של תלמידי הכיתה במתמטיקה?
י. מה הציון החציוני של תלמידי הכיתה במתמטיקה?
יא. מהו הציון השכיח של תלמידי הכיתה במתמטיקה?

דיון: השוו בין הישגי התלמידים בשתי הכיתות.

4. בשוליו של כפר דייגים, ניצב בית מפואר של איש עסקים עשיר. כששואלים אותו למקצועו ולתחביביו, הוא עונה: התחביב שלי הוא לצבור כסף והמקצוע שלי הוא דייג. בכל ימות השבוע, הוא נמצא בעיר ועוסק בעסקיו. בימי ראשון הוא יוצא לדייג בלווית שני בחורים מהכפר. התשלום שהוא משלם להם עבור אותו יום עולה על כל שאר הכנסתם במשך השבוע.

א. מה מייצג יותר טוב את מצבם הכלכלי של תושבי הכפר, ממוצע ההכנסות לנפש או החציון?

ב. מה מייצג יותר טוב את מצבם הכלכלי של שני הבחורים: ממוצע ההכנסות ליום או החציון?

<table>
<tr><th colspan="2">תחום אלגברי: 2. פתרון משוואות ממעלה ראשונה ופתרון בעיות המביאות למשוואות ממעלה ראשונה (המשך מכיתה ז'):</th></tr>
<tr><th>נושאי לימוד</th><th>הבהרות ודוגמאות</th></tr>
<tr><td>פתרון משוואות ממעלה ראשונה ופתרון בעיות המביאות למשוואות ממעלה ראשונה

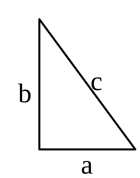
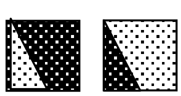
• משוואות עם מכנה מספרי

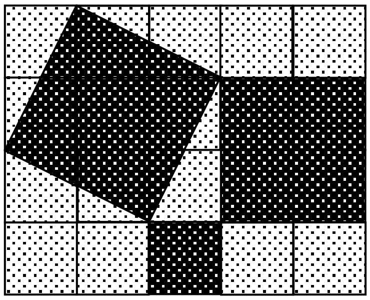
• משוואות עם משתנה במכנה או ביטוי יחיד במכנה שאפשר להביא אותן למשוואה ליניארית.</td><td>הערה: מומלץ לעסוק במשוואות שפתרונן מספרים מסוגים שונים (חיוביים ושליליים, שברים פשוטים, ומספרים עשרוניים).

• משוואות עם שברים שהמכנים שלהם הם מספרים
דוגמה:
$\frac{x-3}{5}+\frac{5-2x}{2}=1\frac{1}{2}$

• משוואות שבמכנה יש ביטוי אלגברי ואין צורך בפירוק לגורמים
דוגמאות:
לפני פתרון משוואה, נבדוק אילו ערכים בשביל x יוצאים מראש מתחום הדיון כי הצבתם נותנת ביטוי חסר משמעות ולכן אינם יכולים להיות פתרון.
לקבוצת המספרים שמותר להציב במשוואה במקום x נקרא תחום הצבה.
1. $\frac{x}{x+3}=5$
2. $\frac{2}{x}+\frac{3}{7}=4$
3. $\frac{2}{x+3}=\frac{1}{x}$
הערה: לא יינתנו משוואות שמתקבל בהן x^2 בשני האגפים.
הערה: אין צורך בחיבור שברים ואף לא במכנה המשותף; מבטלים מכנים על ידי כפל בהם בסדר כלשהו.
דיון במספר פתרונות של משוואות שונות:
1. משוואה שבה כל ערך x שאפשר להציבו הוא פתרון: $\frac{3x+6}{x+2}=3$
2. משוואה שאין לה פתרון: $\frac{2x-5}{x+1}=2$</td></tr>
</table>

אי שוויונות (המשך) • **פתרון בעיות מילוליות מסוגים שונים**	**באי השוויון יהיה מכנה מספרי בלבד.** **אי שוויון שיש להחליף את כיוונו בגלל כפל במספר שלילי.** **דוגמה:** $\frac{3x+5}{-2}<8$ **דוגמאות לבעיות :** 1. כששאלו את פיתגורס למספר תלמידיו ענה: לומדי המתמטיקה מהווים מחצית של התלמידים, לומדי הפיזיקה מהווים רבע מהתלמידים, שביעית מהתלמידים הוגים בדממה, השאר, 3 נשים לומדות מוזיקה. האם מסר לנו די נתונים? אם כן כמה לומדים מתמטיקה? 2. בידי חוט ברזל, שאורכו 25 ס"מ. ברצוני לבנות ממנו מסגרת בצורת מלבן שאורך אחת מצלעותיו 7 ס"מ, ולהותיר לפחות 3 ס"מ ללולאה. מה תוכלו לומר על אורכה של הצלע השנייה? 3. נתונים 5 מספרים עוקבים אשר סכומם הוא 100. א. מי הם המספרים? ב. מה תוכלו לומר על המספרים אם סכומם פחות מ- 100?

תחום גאומטרי: 2. משפט פיתגורס	
נושאי לימוד	**הבהרות ודוגמאות**
משפט פיתגורס: **במשולש ישר זווית סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר.** **$a^2 + b^2 = c^2$** 	**הצגת משפט פיתגורס והוכחתו תיעשה באמצעות פעילויות מקדימות הכוללות גזירה והרכבה.** **דוגמאות לפעילויות מקדימות:** **א. דוגמה לפעילות מקדימה להצגת משפט פיתגורס:** **שטח מרוצף במרצפות ריבועיות שאורך צלען אמה אחת. חלקן כהות, חלקן בהירות וחלקן נחלקות לרבע כהה ושלושה רבעים בהירים, או להיפך, כבציור זה:** 



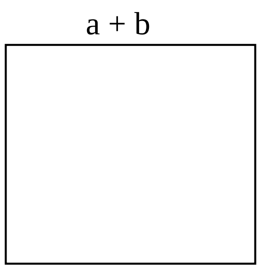
הריצוף מתואר בציור הבא :

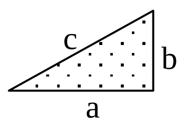
א. נמקו את הטענה ששטח הריבוע הכהה הגדול, שווה לסכום שטחי שני הריבועים הכהים הקטנים.

ב. האם צלעו של הריבוע הכהה הגדול גדולה או קטנה מ- $2^1/_4$ אמות ?

ב. דוגמה לפעילות מקדימה להוכחת המשפט:

כהקדמה להוכחת משפט פיתגורס ניתן להכין מודל בעזרת דף ובו 8 משולשים ישרי זווית זהים ושני ריבועים שצלע כל אחד הוא סכום הניצבים.





מהלך הפעילות: בריבוע אחד שבצו 4 משולשים בהיקף הריבוע, כך שהשטח הלא מכוסה יהיה מרובע. בריבוע השני שבצו 4 משולשים כשני מלבנים, כך שהשטח הלא מכוסה יהיה שני מרובעים.

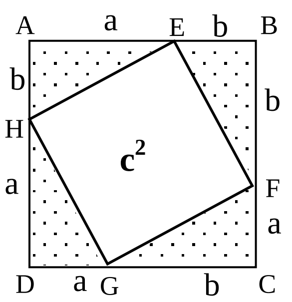
בשני המקרים יתקבלו שטחים לא מכוסים שווים. האם לדעתכם אפשר לראות זאת באופן ישיר או רק על ידי הידיעה שבשני המקרים כיסינו שטחים שווים ?

הוכחת המשפט:

בהמשך לפעילות, משפט פיתגורס יוצג בשלב זה עם הנמקה מהסוג הבא:

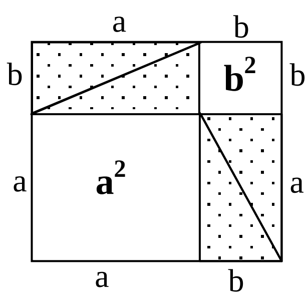
נסמן את צלעות המשולש ישר הזווית: a, b, c כבסרטוט.

נסרטט ריבוע שצלעותיו הן באורך סכום הניצבים $a + b$, נחלק כל צלע לשני חלקים שאורכיהם a ו- b על פי הסדר שבציור שמשמאל ונחבר את נקודות החלוקה בקטעים ישרים.



המשולשים שבפינות (המסומנים בנקודות חופפים למשולש הנתון. במרכז יתקבל ריבוע שצלעו c. (בהמשך נוכיח זאת.)

שטח הריבוע הפנימי, c^2 , שווה לשטח הריבוע הגדול פחות שטחי ארבעת המשולשים שבפינות.

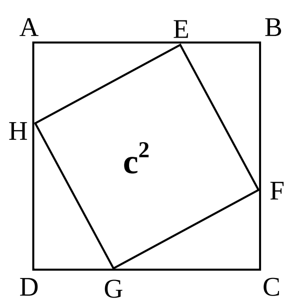


נסרטט את המשולשים בתוך הריבוע כבציור הבא, ואז יתקבל בפינה אחת ריבוע שצלעו a ובפינה שכנגדו ריבוע שצלעו b.

סכום שטחיהם, a^2+b^2 , שווה אף הוא לשטח הריבוע הגדול פחות שטחי ארבעת המשולשים,

ולכן: $a^2+b^2 = c^2$

בהוכחה זו השתמשנו במשפט עזר.



משפט עזר: ריבוע בתוך ריבוע

אם על 4 צלעות ריבוע נקצה 4 קטעים שווים זה לזה מהקדקודים, באותה מגמה, ונחבר את הנקודות הנוצרות על הצלעות על פי סדר הצלעות, יתקבל ריבוע.

הוכחה: בעזרת חפיפת משולשים ישרי זווית על פי הניצבים השווים, ניתן להוכיח כי צלעות המרובע שוות. סכום הזוויות החדות בכל אחד מהמשולשים ישרי הזווית הוא 90° ומכאן, כל זוויות המרובע EFGH ישרות.

חזרה על כיתה ז

שורש ריבועי

למתקדמים: **חישוב שורש ריבועי**	**התלמידים יכירו את פעולת השורש: שורש ריבועי של מספר a כלשהו הוא מספר (חיובי או 0), שאם מכפילים אותו בעצמו מקבלים את a.** **לדוגמה:** $3\cdot 3=9$**, ולכן 3 הוא השורש הריבועי של 9. הפעולה החישובית של מציאת השורש הריבועי נקראת הוצאת שורש ריבועי.** **יש מספרים טבעיים שהשורש שלהם הוא מספר טבעי, לדוגמה:** $\sqrt{25}=5$ $\sqrt{49}=7$ **ויש מספרים טבעיים שהשורש שלהם איננו מספר טבעי, לדוגמה:** $\sqrt{4}<\sqrt{7}<\sqrt{9}$ **כלומר:** $2<\sqrt{7}<3$ **ואמנם בעזרת המחשבון נקבל:** $\sqrt{7}=2.64575....$ **חישוב שורש ריבועי על-ידי חילוק ומיצוע** **נראה דרך נוספת לחישוב** $\sqrt{a}$. **נסמן ב- k קירוב של** $\sqrt{a}$. **מתקיים:** $k\cdot\frac{a}{k}=a$ **כלומר:** $k\cdot\frac{a}{k}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}$ **לכן** $\sqrt{a}$ **בין k ו- a/k.** **מהקירוב k נעבור אל הממוצע החשבוני של k ו- a/k, שהוא (k+a/k)/2.** **ממשיכים כך עד לקבלת הקירוב הרצוי.** **שורש של שורש של שורש** **אם מכניסים למחשבון מספר a גדול מ-1 ולוחצים על מקש השורש מספר רב של פעמים מגיעים למספר שהצג כבר אינו מבחין בינו ובין 1 ולכן מראה 1.** **נימוק: יהי a גדול מ-1 ב- h , כלומר, 1+h = a ואז** $1+h/2>\sqrt{a}$ **כי** $(1+h/2)^2=1+h+h^2/4>1+h=a$ **לכן בכל שלב יהיה המרחק החדש מ-1 קטן מחצי המרחק**

הקודם.

- **מה יותר גדול, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ או $\sqrt{a+b}$? האם תמיד?**
- **מה יותר גדול, $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ או $\sqrt{a\cdot b}$? האם תמיד?**

שימושים במשפט פיתגורס

- השימושים במשפט פיתגורס יהיו מסוגים שונים: בניות, חישובים.

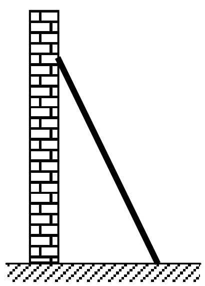
דוגמאות:

1. א. השתמשו בעובדה 1 + 4 = 5 וסרטטו קטע באורך $\sqrt{5}$ ס"מ.

   ב. בנו ריבוע שאלכסונו $\sqrt{8}$ ס"מ.

2. א. סולם נשען על הקיר. רגליו נמצאות במרחק 50 ס"מ מהקיר וראשו בגובה 1.5 מ'. מה אורך הסולם?

   ב. הסולם החליק ומרחקו מהקיר הוא עתה 60 ס"מ. לאיזה גובה יגיע הסולם?



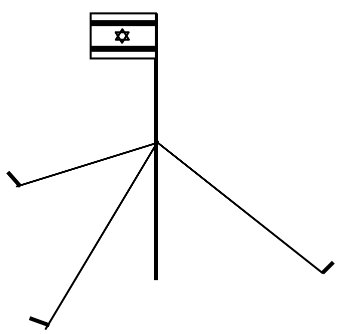
3. אורך האלכסון של מסך טלוויזיה הוא 25 אינץ'.

   א. מהם האורך והרוחב אם ידוע שהיחס ביניהם הוא 4:3?

   ב. מהו שטח המסך?

   ג. יוסי רוצה ליצור מסך רחב לטלוויזיה של 25 אינץ'. רשמו מידות אפשריות של האורך והרוחב של מסך.

4. לפני שהעמידו תורן לדגל קשרו בו שלושה חבלים בגובה 4 מטרים. באיזה מרחק מן התורן יש לתקוע את היתדות אם אורך כל חבל הוא 7.3 מטר, ו-30 ס"מ מן החבל דרושים כדי לקשור אותו ליתד?



תחום מספרי	**תחום אלגברי**	**תחום גאומטרי**
3. אחוזים (10 שעות)	**3. מערכת שתי משוואות ליניאריות עם 2 משתנים** (14 שעות)	**3. מבנה דדוקטיבי** (14 שעות)

תחום מספרי: 3. אחוזים

נושאי לימוד	**הבהרות ודוגמאות**
אחוזים • **אומדנים באחוזים**	**דוגמה:** 48% מהמשתתפים בכנס הצביעו בעד ההחלטה. בעד ההחלטה הצביעו: א. רוב המשתתפים ב. קרוב לחצי מהמשתתפים ג. 48 אנשים ד. לא ניתן לדעת
• **ביטוי הקשר בין שלושה גדלים במשוואה אחת: כמות, אחוז, ערך האחוז.**	$\frac{\text{אחוז}}{100} = \frac{\text{ערך האחוז}}{\text{הכמות}}$
• **פתרון שאלות מילוליות המשלבות אחוזים**	• השאלות יעסקו במגוון נושאים. ייעשה שימוש באחוזים גם בהצגת הנתונים ובניתוחם. **דוגמאות:** 1. בכיתה ח1 25 תלמידים. 60% מהתלמידים חברים בתנועות נוער. כמה תלמידים חברים בתנועות נוער? 2. 60% מ - 60 הם 75% מ- א. 75 ב. 48 ג. 38 ד. 32 3. נתון ריבוע. אם נגדיל שתי צלעות נגדיות שלו ב 15% נקבל מלבן שהיקפו גדול ב- 6 ס"מ מהיקף הריבוע. מה אורך צלע הריבוע? מה שטח הריבוע? 4. התבוננו בדיאגרמות הבאות המייצגות את מספר המכוניות שנמכרו בסוכנות

מכוניות בחודשים ינואר, פברואר ומארס בשנים 2002, 2003.

התוצאות בדיאגרמות מוצגות לאחר שעוגלו.

דיאגרמה א – שנת 2002

דיאגרמה ב – שנת 2003

א. כמה מכוניות ניקנו בחודש ינואר בשנת 2002?

ב. כמה מכוניות ניקנו בחודש ינואר בשנת 2003?

ג. מהו אחוז המכוניות שנמכרו בחודש ינואר מתוך המכוניות שנמכרו בשלושת החודשים?
התייחסו לכל שנה בנפרד.

<table>
<tr><th colspan="2">תחום אלגברי: 3. מערכת שתי משוואות ליניאריות בשני משתנים</th></tr>
<tr><th>נושאי לימוד</th><th>הבהרות ודוגמאות</th></tr>
<tr><td>

מערכת של שתי משוואות ליניאריות בשני משתנים

- **היכרות**

- **פתרונות אלגברים וייצוגים גרפיים של מערכת משוואות בשני משתנים**

- **שיטות פתרון (הצבה, הבאה למקדמים שווים)**

- **ניתוח מספר הפתרונות**

</td><td>

- הצעה להכיר מערכת משוואות באמצעות דוגמה של שאלה מילולית שאפשר לתרגם אותה למערכת משוואות.

דוגמה:

מצאו שני מספרים שסכומם 3 והפרשם 1.

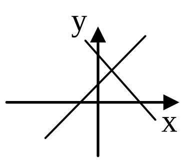
ניתן לתרגם את הבעיה למערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$$

הפרק יעסוק בדרכים שונות לפתרון בעיות כאלה.

דוגמאות:

1. לפניכם 3 מערכות משוואות בשני נעלמים וגרף. הגרף מתאים רק לאחת המערכות, מצאו את המערכת. נמקו!



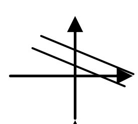
ג. $\begin{cases} 2y-x=2 \\ y=x+3 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} y-x=2 \\ y+x=4 \end{cases}$ א. $\begin{cases} 2x+y=2 \\ x+3y=1 \end{cases}$

2. פתרו את מערכות המשוואות הבאות:

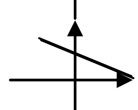
א. $$\begin{cases} 0.2x+0.1y=0.2 \\ 0.3x-0.1y-0.1x=-0.4 \end{cases}$$

ב. $$\begin{cases} \frac{x-4y}{2}=\frac{x-2y}{5} \\ \frac{1}{2}x+2y=x-1 \end{cases}$$

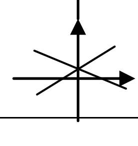
3. התאימו בין הייצוגים הגרפיים לייצוגים האלגבריים.



א. $\begin{cases} 6x+9y=12 \\ 2x+3y=4 \end{cases}$



ב. $\begin{cases} 6x+9y=4 \\ 2x+3y=12 \end{cases}$



ג. $\begin{cases} 9x+3y=12 \\ -3x+2y=8 \end{cases}$

</td></tr>
</table>

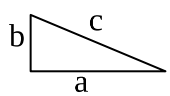
• **פתרון שאלות מילוליות**	**דוגמאות:** 1. רות שילמה 29 ₪ עבור כביסת 4 מגבות ו 7 סדינים. לקראת החג יצאו במבצע הנחות: מקבלים 20% הנחה על כל הכביסה. במסגרת ההנחה שילמה רות 20 ₪ בלבד עבור כביסת 5 מגבות ו- 5 סדינים. מהו התעריף הרגיל של המכבסה עבור כביסת מגבת אחת? סדין אחד? 2. דני ועמי יצאו זה לקראת זה ברגל משני יישובים המרוחקים זה מזה 30 ק"מ. הם נפגשים כעבור 4 שעות. למחרת, עמי יצא 5 שעות אחרי דני. הם נפגשו שעתיים לאחר צאתו של עמי. מהי מהירות ההליכה של דני ועמי? 3. אם נגדיל צלע אחת של מלבן ב 2 ס"מ ונקטין צלע סמוכה לה ב 3 ס"מ, נקבל ריבוע שהיקפו 20 ס"מ. מהן מידות המלבן? מה שטח המלבן? מה שטח הריבוע שנוצר?

תחום גאומטרי: 3. מבנה דדוקטיבי	
נושאי לימוד	**הבהרות ודוגמאות**
מבנה דדוקטיבי **מבוא למבנה דדוקטיבי והנחות היסוד (אכסיומות)**	**להבטחת נכונותם של משפטי הגאומטרייה נוכיח שהם נובעים בדרך הגיונית ממשפטים קודמים. אך גם המשפטים הקודמים טעונים הוכחה. נלך אפוא אחורנית עד שנגיע להנחות יסוד שאיננו נוטים לפקפק בנכונותן.** **מוצע לצאת ממשפט פיתגורס ולהגיע דרך משפטי ביניים אל הנחות היסוד הבאות:** **א. אכסיומת הישר: דרך שתי נקודות שונות עובר ישר יחיד.** **ב. אכסיומת ההעתקות: ניתן להזיז מצולע ממקום למקום, לסובבו ולהפכו, בלי לשנות את צלעותיו וזוויותיו .** **ג. אכסיומת המלבן: אם למרובע שלוש זוויות ישרות אז גם הרביעית ישרה וכל שתי צלעות נגדיות שלו שוות זו לזו.**

הבהרה: כללנו באכסיומת המלבן גם את שוויון הצלעות הנגדיות למרות שעקרונית ניתן להוכיח את שוויון הצלעות.

משפט פיתגורס הוא משפט מפתיע שאינו ברור מאליו. כדי להיות בטוחים בנכונותו היה עלינו להוכיח אותו על סמך ידע קודם. הבה נסתכל בשלבי ההוכחה של משפט פיתגורס, ובכל שלב נזכיר באיזה ידע קודם השתמשנו. (בהמשך נבחן גם את הידע הקודם וגם את המשפטים הקודמים לקודמים, עד שנגיע להנחות יסוד שסביר להניחן ללא פקפוק.)

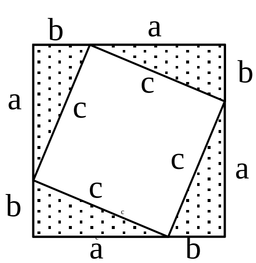
ובכן, נתון משולש ישר זווית שניצביו a ו-b



שלב א. נבנה שני ריבועים שצלע כל אחד מהם שווה לסכום הניצבים של המשולש הנתון. (ריבועים אלה הם הריבועים הגדולים שבציורים א ו-ב שלהלן)

השתמשנו בכך שאנחנו יודעים לבנות מלבן (בין אם הוא ריבוע ובין אם לא) וזאת על סמך הכלל האומר שאם במרובע יש שלוש זוויות ישרות אז הוא מלבן.

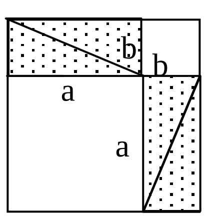
שלב ב. "נרצף" 4 משולשים החופפים למשולש הנתון סביב היקף המרובע (מבפנים) כמתואר בציור א. המרובע שנותר הוא ריבוע שצלעו c.



ציור א

השתמשנו בזה שניתן להעתיק מצולע ממקום למקום לסובבו ולהפכו, בלי לשנות את צלעותיו וזוויותיו, וכן בזה שסכום הזוויות החדות במשולש ישר זווית הוא 90^0 (לכן כל זווית של המרובע הפנימי היא $180^0-90^0=90^0$)

שלב ג. נעתיק שנים ממשולשי הפינה ונצמידם לחבריהם ליצירת מלבנים, ונעמיד את המלבנים בפינות הריבוע הגדול, כבציור ב.



ציור ב

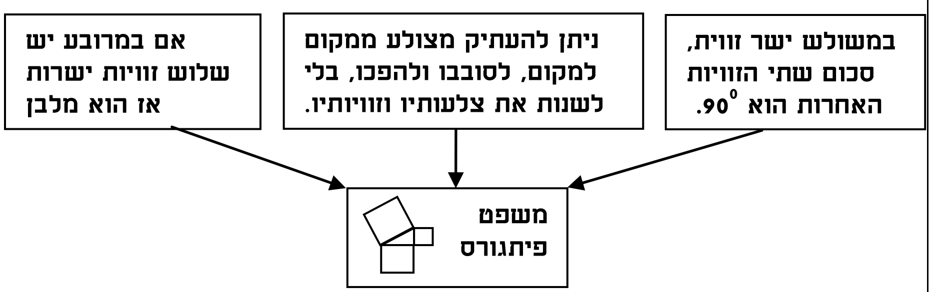
השטח הלא מרוצף יהיה מורכב כעת משני ריבועים שצלע האחד a וצלע חברו b.

גם כאן השתמשנו בכלל ההעתקות שהזכרנו קודם. קבלת המלבנים נבעה מזה שסכום הזוויות החדות במשולש ישר זווית הוא 90^0 (גם כלל זה נזכר כבר בשלב הקודם).

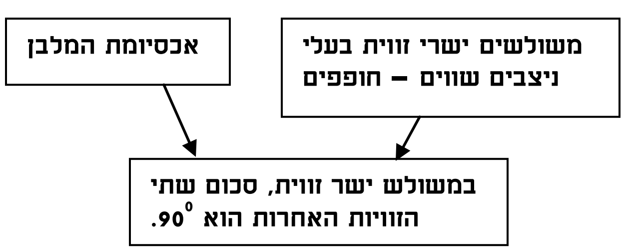
שלב ד. מהשוואת השטחים הלא מרוצפים בשני הריבועים נקבל ששטח הריבוע הבנוי על היתר c שווה לסכום שטחי הריבועים הבנויים על הניצבים a ו- b .

כך מוכח משפט פיתגורס בנוסח המדבר על שטחי הריבועים בלי להזכיר את הנוסחה $a^2 + b^2 = c^2$. הנוסחה, הנדרשת לצורך חישובים, מתקבלת בעזרת נוסחת שטח המלבן: $S = a \cdot b$, שהיא מסקנה מאכסיומת המלבן.

נסרטט תרשים המסכם את הטענות שעליהם מתבסס משפט פיתגורס:

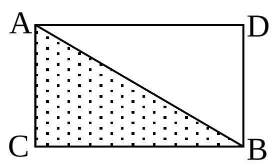


שתיים מטענות אלה, הנקראות אכסיומת ההעתקות ואכסיומת המלבן תתקבלנה כהנחות יסוד, אך את הטענה על זוויותיו של משולש ישר זווית נוכיח על סמך אכסיומת המלבן ועל סמך משפט נוסף כבתרשים הבא.



הוכחה:

נתון משולש ישר זווית ABC שמיוצג על ידי המשולש הנקוד שבציור שלהלן. לניצביו של משולש זה נעלה אנכים בנקודות A ו-B ונסמן את נקודת פגישתם ב- D.



מאכסיומת המלבן נובע שהמרובע ACBD הוא מלבן (כי זוויותיו בקדקודים A, C, B הן ישרות).

ומכאן שגם זווית D ישרה.

AC = DB כי הן צלעות נגדיות במלבן

CB = AD כי הן צלעות נגדיות במלבן

וממשפט האומר שמשולשים ישרי זווית בעלי ניצבים שווים הם חופפים זה לזה נובע שהמשולשים ACB ו- ADB חופפים .

מהחפיפה נובע שסכום זוויות האחד שווה לסכום זוויות השני, ומכיוון שסכומם הכולל הוא 360^0 יהיה סכום זוויות האחד שווה ל- 180^0.

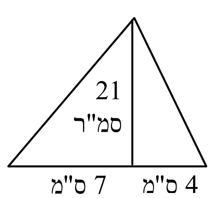
כשנפחית את הזווית הישרה יישארו לשתי הזוויות האחרות 90^0 .

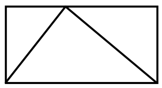
כעת נוכל ללכת צעד נוסף אחורנית ונוכיח את המשפט על חפיפת משולשים ישרי זווית שניצביהם שווים על סמך אכסיומת ההעתקות בתוספת אכסיומת הישר (פירוט ההוכחה בנספח).

בנספח מופיע כאן תרשים מסכם. אין חובה להשתמש בתרשים מעין זה או בתרשימים שלעיל, אך חובה להציג בדרך ברורה את מסלולי ההיסקים מהנחות היסוד אל המטרה.

בסעיפים הבאים נראה שהאכסיומות שלנו משמשות בסיס למשפטים נוספים.

בהמשכו של פרק זה, יידרשו התלמידים לתת הנמקות על סמך משפטים ואכסיומות אך לא יידרשו לנסח הוכחות מלאות. דוגמאות בהמשך.

משפט: **סכום הזויות במשולש הוא 180^0.**	**נציין שמשפט מוכר זה נובע מהמשפט על זוויותיו של משולש ישר זווית. אפשר להראות הוכחה בעזרת חלוקת המשולש על ידי גובה פנימי (כמפורט בנספח).** **דוגמה:** אחת מזוויותיו של משולש היא בת 36^0 ושתי האחרות שוות זו לזו. מה גודל כל אחת מהן?
משפט: **שטח מלבן שווה למכפלת צלעות סמוכות שלו.**	**הערה: משפטי השטח של המלבן ושל המשולש הוכחו בכיתה ז' וההוכחות שם הסתמכו בפועל רק על מה שמופיע בהנחות היסוד שכאן. לכן אין חובה לחזור כאן על ההוכחות, אך יש לציין שהן הסתמכו על ההנחות שהנחנו כאן.**
משפט: **שטח משולש ישר זווית שווה לחצי מכפלת הניצבים.**	**גם למשפט זה וגם לשני המשפטים הבאים יש הצעה מפורטת להוכחה בנספח.**
משפט: **שטח משולש שווה לחצי מכפלת בסיס בגובה.**	**נדגיש שהוכחת המשפט התבססה על אכסיומת המלבן, על משפט החפיפה של משולשים ישרי זווית ועל המשפט על שטח המלבן. מומלץ לצרפו לתרשים עם חיצי-קישור-היסקי היוצאים ממשפטים אלה.** **די להציג את ההוכחה בשביל גובה פנימי. באשר לגובה חיצוני, ניתן להסתפק בהפניית תלמידים מתעניינים אל ספר הלימוד.** • תרגול של חישובי שטחים בשילוב עם משפט פיתגורס. **דוגמאות:** 1. מה שטחו של משולש ישר זווית שאחד מניצביו בן 8 ס"מ והיתר שלו בן 10 ס"מ ? 2. הגובה מחלק צלע של משולש לחלקים בני 4 ו-7 ס"מ, ואחד משני חלקי המשולש הוא בן 21 סמ"ר. מה שטחו של החלק השני? (הנחייה: מהו הגובה?) 

<table>
<tr>
<td></td>
<td>3. מנקודה שעל צלעו של מלבן סרטטו קטעים אל שני הקצוות של הצלע שמולה. נמקו את הטענה ששטח המשולש הגדול שהתקבל בדרך זאת שווה לסכום שטחי שני המשולשים הקטנים.
</td>
</tr>
<tr>
<td>תכונות המשולש שווה השוקיים
משפט:
הגובה לבסיס במשולש שווה שוקיים מחלק אותו לשני משולשים חופפים.

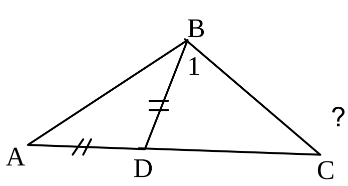
מסקנה:
הגובה לבסיס במשולש שווה שוקיים הוא גם חוצה זווית וגם תיכון.

מסקנה:
במשולש שווה שוקיים שוות זוויות הבסיס זו לזו.</td>
<td>ההוכחה מפורטת בנספח (על בסיס משפט פיתגורס נקבל משולשים ישרי זווית השווים בשני ניצבים).

בהקשר זה, נחזור על ההגדרות של חוצה זווית ותיכון.
(מוצע לציין ש המילה "תיכון" מופיעה במקרא לראשונה בספר שמות, פרק כ"ו פסוק כ"ח, בתיאור בנית המישכן: "והַבְּרִיחַ הַתִּיכֹן בתוך הקרשים". פירוש המילה הוא "עובר באמצע")

דוגמאות:
1. נתון משולש שווה שוקיים ABC. AD הוא גובה לבסיס. זווית הראש A היא בת 40^0.
א. מהן זוויות המשולש ABC?
ב. BF חוצה את זווית B. חשבו את זוויות המשולש CBF.

2. במשולש שווה צלעות הזוויות הן בנות $60°$, נמקו.

3. בסרטוט שלפניכם הנקודה D נמצאת על AC.
נתון: משולש ADB הוא שווה שוקיים (AD=DB)
$\measuredangle BAD = 40°$, $\measuredangle BCA = 30°$, מה הגודל של $\measuredangle B_1$?
פרטו את החישוב ונמקו.

4. במשולש שווה שוקיים ABC אורך השוק הוא 13 ס"מ ואורך הבסיס הוא 10 ס"מ.
א. חשבו את גובה המשולש (הגובה לבסיס).
ב. חשבו את שטח המשולש.
ג. חשבו את הגובה לשוק.
ד. BD תיכון לשוק. מה שטח המשולש ABD?</td>
</tr>
</table>

ה. למתקדמים: המצרים הקדמונים חשבו את שטח משולש שווה שוקיים על ידי מחצית מכפלת הבסיס באורך השוק. מה גודל השגיאה שלהם? מהו אחוז השגיאה ביחס לשטח הנכון?

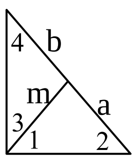
משפט:

אם במשולש התיכון לצלע שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה אז המשולש ישר זווית.

- לפניכם דוגמה פתורה המדגימה את אופן ההנמקה הנדרש מהתלמידים.

דוגמה:

השלימו את החסר בהוכחה הבאה:



נתון ש- a = b = m

∢1=∢___ כי ______________________________

∢3=∢___ כי ______________________________

___מעלות = ∢4 + ∢3 + ∢2 + ∢1 כי ______________________

לכן: 90 מעלות = ∢1+∢3

בשלב זה מוצע לציין ששלושת משפטי החפיפה שהכרנו בכתה ז יכולים אף הם להתקבל כמסקנות מן האכסיומות שלנו (ההוכחות מפורטות בנספח)

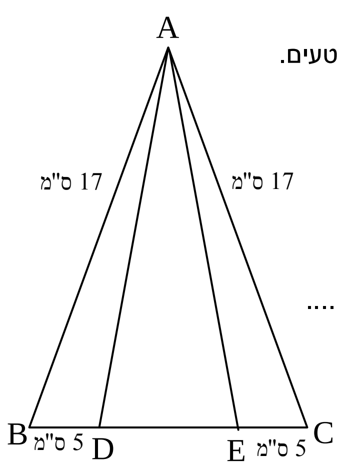
משפט:

משולש בעל שתי זוויות שוות הוא משולש שווה שוקיים.

המשפט יוכח על ידי הורדת גובה, השוואת זוויות ומשפט החפיפה זצ"ז.

- לפניכם דוגמה פתורה המדגימה את אופן ההנמקה הנדרש מהתלמידים.

דוגמה:



במשולש ABC שבציור מסומנים האורכים של ארבעה קטעים.

טענה: המשולש ADE הוא משולש שווה שוקיים.

הוכחה:

השלימו את החסר.

........לפי משפט ∢C = ∢B

המשולש ABD חופף למשולש ACE לפי משפט חפיפה....

ולכן: AE = AD

כלומר המשולש ADE הוא....

תרגילים נוספים המשתמשים במשפטי החפיפה עם המשפטים שכאן.

למתקדמים **משפט:** **במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר.**	**תזכורת: משולש ישר זווית ניתן להשלמה למלבן, אלכסונים במלבן שווים וחוצים זה את זה.**

	תחום אלגברי	**תחום גאומטרי**
	4. טכניקה אלגברית (8 שעות)	**4. שימושי משפט פיתגורס במרחב, מנסרה ופירמידה** (4 שעות)

תחום אלגברי: 4. טכניקה אלגברית

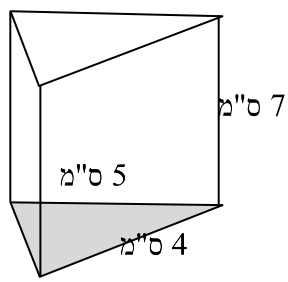
נושאי לימוד	**הבהרות ודוגמאות**
• **הרחבת חוק הפילוג כולל שימושים: משוואות, בעיות מילוליות.**	**חוק הפילוג המורחב יתקבל מחוק הפילוג:** $(a + b)(c + d) = (a + b)c + (a + b)d = ac + bc + ad + bd$ **דוגמאות:** 1. א. כתבו ביטוי שקול לביטוי: $(x - 2)(4 - x)$ ב. פתרו את המשוואה: $(x - 2)(4 - x) = 6 - x^2$ 2. פתרו את מערכת המשוואות: $\begin{cases}(x-1)(y+2) = xy + 3\\(x+5)(y-1) = (x-3)(y+2)\end{cases}$ 3. נתון ריבוע שאורך צלעו a ס"מ. א. מהו שטחו של הריבוע? ב. הגדילו את אורך הצלע ב- 3 ס"מ. מהו שטח הריבוע? ג. בכמה גדל השטח? 4. נתון ריבוע שאורך צלעו a ס"מ. א. מהו שטחו של הריבוע? ב. הגדילו את האורך של שתי צלעות נגדיות ב-3 ס"מ ואת האורך של שתי הצלעות הנגדיות האחרות ב- 5 ס"מ. מהו שטחו של המלבן שנוצר? ג. שטח המלבן שנוצר גדול ב-47 סמ"ר מהשטח של הריבוע. מהו היקף הריבוע?

• **הוצאת גורם משותף ברב איברים הכוללים לא יותר מ-3 איברים עד מעלה שלישית** • **צמצום שברים אלגברים בעזרת הוצאת גורם משותף** • **פתרון משוואות ריבועיות מהצורה:** $ax^2 + bx = 0$	**דוגמאות:** **יש ערכים שאסור להציב בחלק מהביטויים הבאים כיוון שהם נותנים ביטויים חסרי משמעות.** רשמו איזה ערך אסור להציב בשביל x או m וצמצמו את הביטויים האלגבריים הבאים: א. $\frac{x^2-5x}{2x-10}$ ב. $\frac{4x^3-2x^2+4}{2}$ ג. $\frac{m^3-m^2}{1-m}$ **דוגמאות:** **1.** $x^2 + 7x = 0$ **2.** $\frac{x^2+5x}{x+5} = 0$

תחום גאומטרי: 4. שימושי משפט פיתגורס במרחב	
נושאי לימוד	**הבהרות ודוגמאות**
שימושי משפט פיתגורס במרחב בתיבה, פירמידה ומנסרה	**מומלץ להיעזר בגופים להדגמה.** **אורך אלכסון תיבה יתקבל בהפעלה חוזרת של משפט פיתגורס.** **דוגמאות:** 1. האם אפשר להניח מטריה שאורכה 75 ס"מ במזוודה שמימדיה $25\times40\times60$? 2. נפח של תיבה הוא 180 סמ"ק. היעזרו בהמחשה של תיבה. א. אילו אורכי צלעות יכולים להיות לתיבה? רשמו 3 אפשרויות. ב. בחרו אחת התיבות שרשמתם וחשבו את האורכים של אלכסוני הפאות של התיבה. ג. האם אורך כל אלכסון של פאה של תיבה גדול מאורך כל אחת מצלעותיה? נמקו או הדגימו. ד. חשבו את אורך אלכסונה של התיבה. ה. שערו, האם יש תיבה אחרת שנפחה 180 סמ"ק ואלכסונה גדול יותר? נמקו. ו. בדקו את השערתכם על ידי חישוב. ז. האם אורך אלכסון התיבה גדול מאורך כל אחת מצלעותיה? נמקו.

- חישוב נפח מנסרה

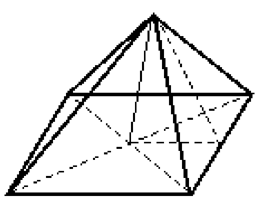
3. מצאו נפח של מנסרה שבבסיסה משולש
ישר זווית על פי הנתונים הרשומים בסרטוט.

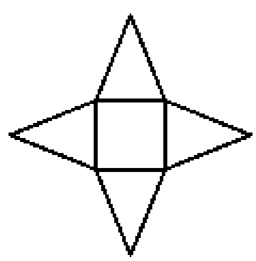


שימוש בתכונות המשולשים שווי השוקיים המופיעים בפירמידות.

פירמידה ריבועית ישרה תתואר בעזרת פריסה שלה, הבנויה מריבוע שצלעותיו בסיסים למשולשים שווי-שוקיים חופפים. הפריסה תשמש לבניית דגם. (שקוף).
בתרגילים יחושבו קטעים המסורטטים בציור המצורף על פי נתונים על אורכי קטעים אחרים שם.

דוגמה (מסכמת):
גובהה של הפירמידה הגדולה שבגיזה (במצרים), שהיא משוכללת וישרה, הוא 146 מטר וצלע הבסיס 230 מטר בקירוב. בעבר היו פאותיה הצדדיות מצופות אבן חלקה. מה היה שטחו הכולל של הציפוי?





נספח א

משולשים דומים – פעילות

א. בסוף הנספח יש 8 משולשים זהים. גזרו 4 משולשים מתוך דף המשולשים.
חברו את ארבעת המשולשים כך שייוצר משולש אחד "גדול".

ב. ענו על השאלות הבאות:

1. מה תוכלו לומר על הזוויות של המשולש החדש? (התייחסו לזוויות המשולש המקורי)

____

2. מה תוכלו לומר על אורך כל אחת מצלעות המשולש החדש? (התייחסו לצלעות המשולש המקורי)

____

3. מה תוכלו לומר על שטח המשולש החדש? (התייחסו לשטח המשולש המקורי)

____

4. מה תוכלו לומר על הקטע המחבר את אמצעי שתי הצלעות במשולש "הגדול"?

ג. עבדו בזוגות. חברו 9 משולשים גזורים למשולש אחד "גדול".

ד. ענו על השאלות 1 – 3 של סעיף ב.

ה. מה תוכלו לומר על היחס שבין צלעות משולש המחובר מ- 4 משולשים לצלעות משולש המחובר מ- 9 משולשים?

____

ו. מה תוכלו לומר על היחס שבין שטח משולש המחובר מ- 4 משולשים לשטח משולש המחובר מ- 9 משולשים?

____

ז. עבדו בזוגות. חברו 16 משולשים גזורים למשולש אחד "גדול".

ח. ענו על השאלות 1 – 4 של סעיף ב.

ט. אלעד אמר: "אם אני רוצה להרכיב משולש "גדול" מהמשולשים הקטנים אני חייב לקחת מספר משולשים שהוא ריבוע של מספר כלשהו, למשל 25 משולשים או 36 משולשים"
טליה אמרה: "אני יכולה להרכיב משולש "גדול" מכל מספר משולשים שאני רוצה"
מה דעתכם?

י. מה תוכלו לומר על היחס שבין צלעות משולש מקורי לצלעות משולש המחובר ממספר משולשים?

____

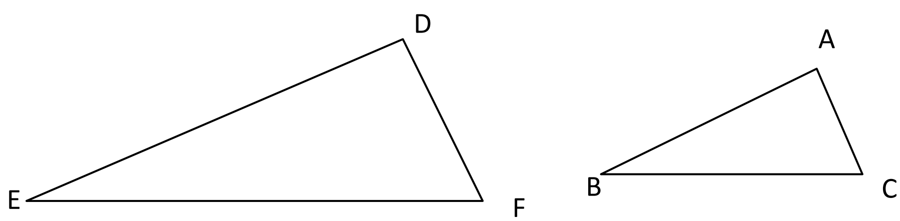
יא. מה תוכלו לומר על היחס שבין שטח משולש מקורי לשטח משולש המחובר ממספר משולשים?

____

הגדרה:

שני משולשים דומים הם שני משולשים ששלוש הזוויות שלהם שוות בהתאמה וקיים יחס שווה בין שלושת זוגות הצלעות המתאימות - **יחס הדמיון**.

משולשים חופפים הם גם משולשים דומים, אך משולשים דומים אינם בהכרח חופפים.

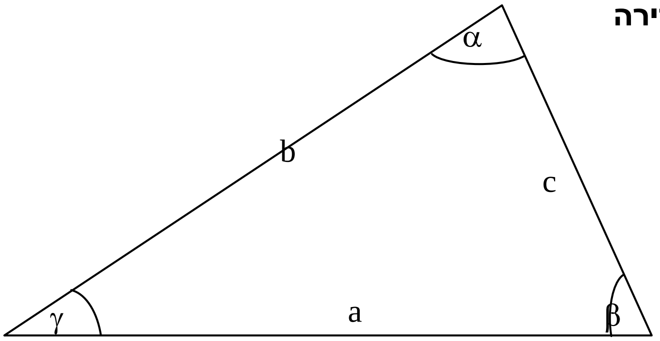


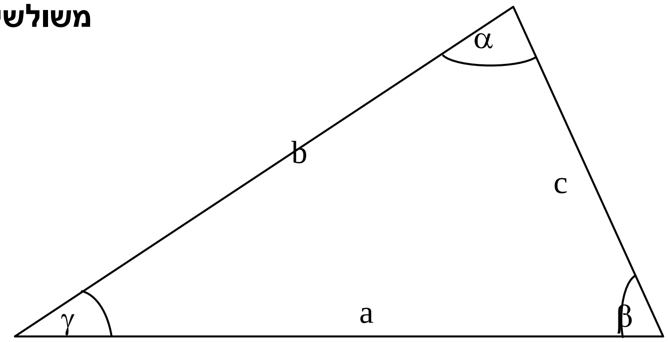
$$\Delta ABC \sim \Delta DEF$$

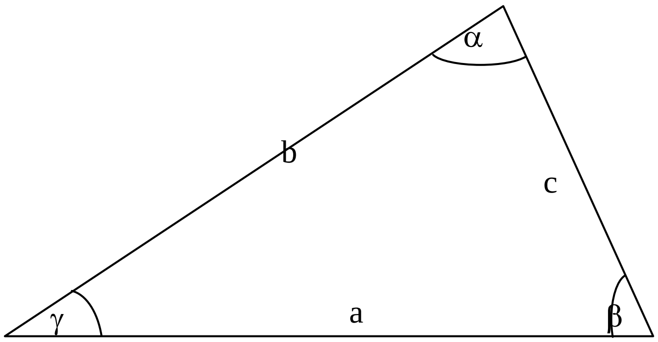
$$\measuredangle A = \measuredangle D\ ,\ \measuredangle B = \measuredangle E\ ,\ \measuredangle C = \measuredangle F$$

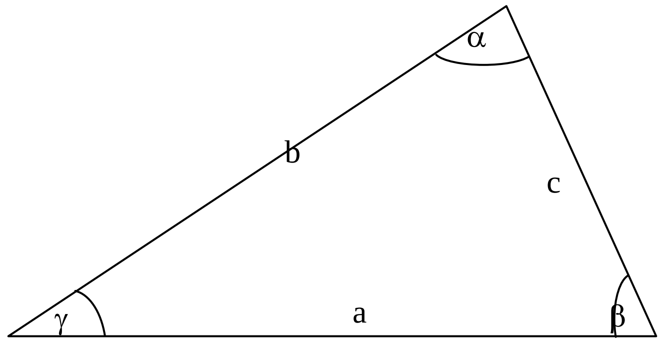
$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$

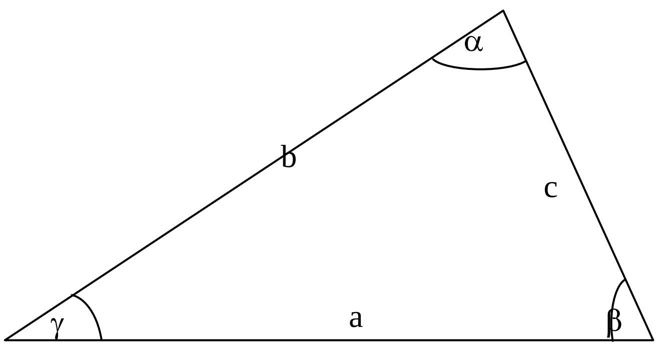
משולשים לגזירה

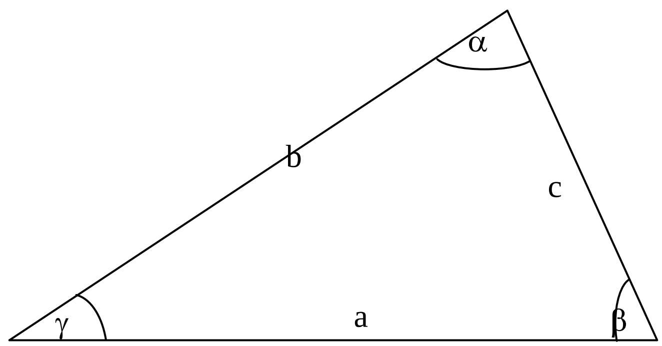


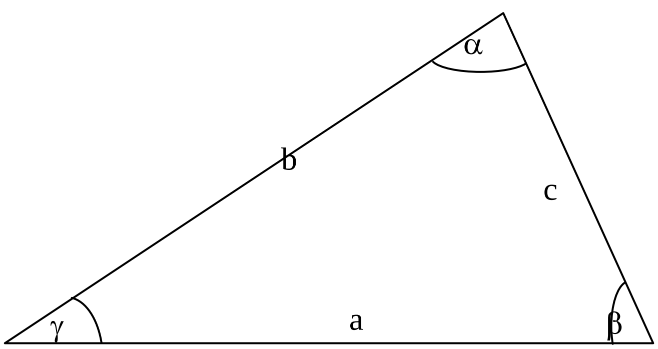


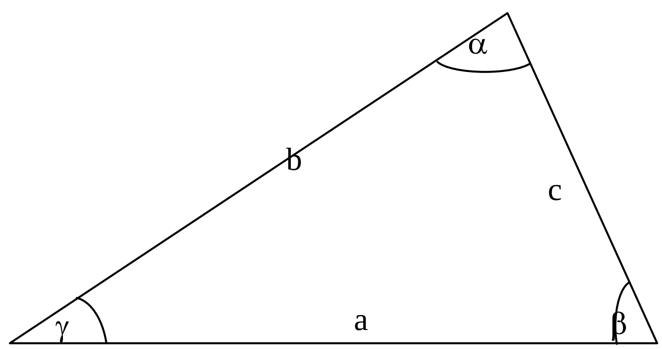












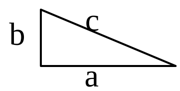
נספח ב

מבנה היסקי לגאומטרייה

א. ממשפט פיתגורס אחורנית אל הנחות יסוד

משפט פיתגורס הוא משפט מפתיע שאינו ברור מאליו. כדי להיות בטוחים בנכונותו היה עלינו להוכיח אותו על סמך ידע קודם. הבה נסתכל בשלבי ההוכחה של משפט פיתגורס, ובכל שלב נזכיר באיזה ידע קודם השתמשנו. (בהמשך נבחן גם את הידע הקודם וגם את המשפטים הקודמים לקודמים, עד שנגיע להנחות יסוד שסביר להניחן ללא פקפוק.)

ובכן, נתון משולש ישר זווית שניצביו a ו-b.

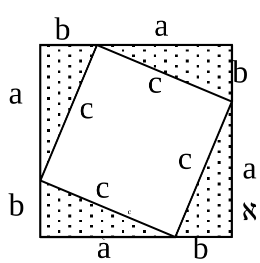


שלב א. נבנה שני ריבועים שצלע כל אחד מהם שווה לסכום הניצבים של המשולש הנתון. (ריבועים אלה הם הריבועים הגדולים שבציורים א ו-ב שלהלן)

השתמשנו בכך שאנחנו יודעים לבנות מלבן (בין אם הוא ריבוע ובין אם לא) וזאת על סמך הכלל האומר שאם במרובע יש שלוש זוויות ישרות אז הוא מלבן.

שלב ב. "נרצף" 4 משולשים החופפים למשולש הנתון סביב היקף המרובע (מבפנים) כמתואר בציור א. המרובע שנותר הוא ריבוע שצלעו c.

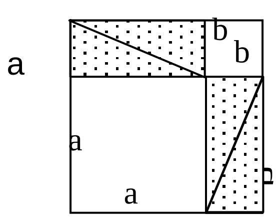
השתמשנו בזה שניתן להעתיק מצולע ממקום למקום לסובבו ולהפכו, בלי לשנות את צלעותיו וזוויותיו, וכן בזה שסכום הזוויות החדות במשולש ישר זווית הוא 90^0 (לכן כל זווית של המרובע הפנימי היא $90^0=180^0-90^0$)



ציור א

שלב ג. נעתיק את משולשי הפינה, נצמידם זה לזה באופן שכל שנים מהם יצרו מלבן ונמקם את המלבנים בפינות הריבוע כבציור ב. השטח הלא מרוצף יהיה מורכב כעת משני ריבועים שצלע האחד a וצלע חברו b.

גם כאן השתמשנו בכלל ההעתקות שהזכרנו קודם. קבלת המלבנים נבעה מזה שסכום הזוויות החדות במשולש ישר זווית הוא 90^0 (גם כלל זה נזכר כבר בשלב הקודם).

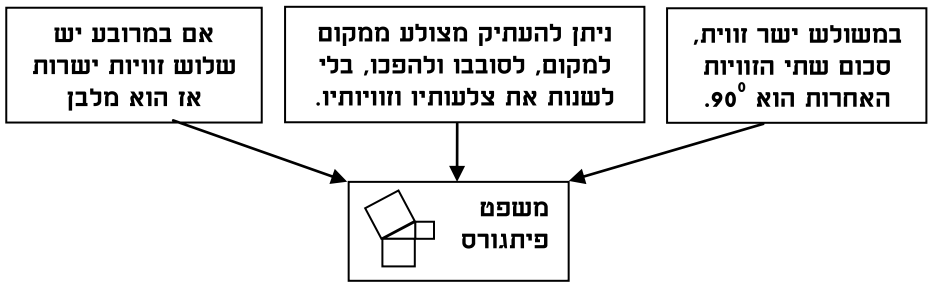


ציור ב

שלב ד. מהשוואת השטחים הלא מרוצפים בשני הריבועים נקבל ששטח הריבוע הבנוי על היתר c שווה לסכום שטחי הריבועים הבנויים על הניצבים a ו-b .

כך מוכח משפט פיתגורס בנוסח המדבר על שטחי הריבועים בלי להזכיר את הנוסחה $a^2 + b^2 = c^2$.
הנוסחה, הנדרשת לצורך חישובים, מתקבלת בעזרת נוסחת שטח המלבן: $S = a \cdot b$, שהיא מסקנה מאכסיומת המלבן.

נסרטט תרשים המסכם את הטענות שעליהם מתבסס משפט פיתגורס:

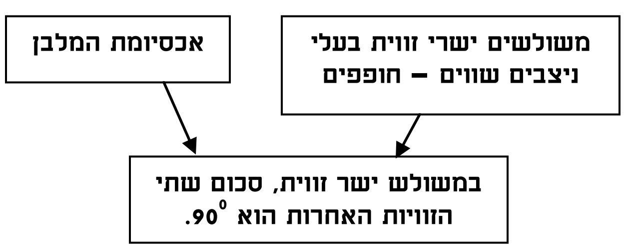


נפרט את הוכחותינו לחלק מטענות אלה.

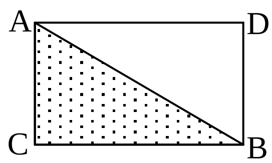
א. הטענה על דבר האפשרות להעתיק מצולע נחשבת פשוטה וברורה. לא נהוג לבסס אותה על טענות קודמות אלא לראות בה הנחת יסוד, והיא נקראת **אכסיומת ההעתקות**.

ב. גם הטענה על מרובע שיש לו שלוש זוויות ישרות תיחשב הנחת יסוד (כלומר, לא נוכיח אותה על סמך משהו קודם). טענה זאת היא צירוף של שתי טענות מוכרות שנוסח מאוחד שלהן הוא כך: אם במרובע יש שלוש זוויות ישרות גם הרביעית ישרה, והצלעות הנגדיות שוות זו לזו. מרובע כזה נקרא מלבן והטענה המצורפת נקראת **אכסיומת המלבן**.

ג. הטענה השלישית ששימשה בהוכחת משפט פיתגורס, מתקבלת כמסקנה מאכסיומת המלבן וממשפט מוכר נוסף כמתואר בתרשים הבא:



ובכן, נתון משולש ישר זווית ABC שמיוצג על ידי המשולש הנקוד שבציור שלהלן. לניצביו של משולש זה נעלה אנכים בנקודות A ו-B ונסמן את נקודת פגישתם ב- D.
מאכסיומת המלבן נובע שהמרובע ACBD הוא מלבן (כי זוויותיו בקדקודים A, C, B הן ישרות).
ומכאן שגם זווית D ישרה.



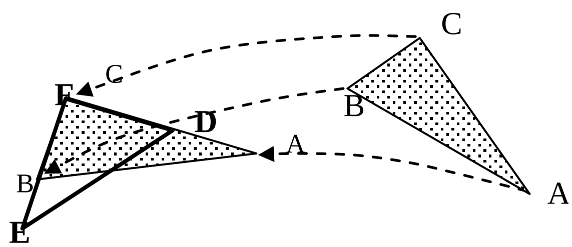
AC = DB כי הן צלעות נגדיות במלבן

CB = AD כי הן צלעות נגדיות במלבן

וממשפט האומר שמשולשים ישרי זווית בעלי ניצבים שווים הם חופפים זה לזה נובע שהמשולשים ACB ו- ADB חופפים.

מהחפיפה נובע שסכום זוויות האחד שווה לסכום זוויות השני, ומכיוון שסכומם הכולל הוא 360^0 יהיה סכום זוויות האחד שווה ל- 180^0. כשנפחית את הזווית הישרה יישארו לשתי הזוויות האחרות 90^0 .

כעת נלך צעד נוסף אחורנית ונוכיח את המשפט על חפיפת משולשים ישרי זווית שניצביהם שווים על סמך אכסיומת ההעתקות בתוספת אכסיומה האומרת שדרך שתי נקודות שונות עובר ישר אחד בלבד (זו נקראת **אכסיומת הישר**).

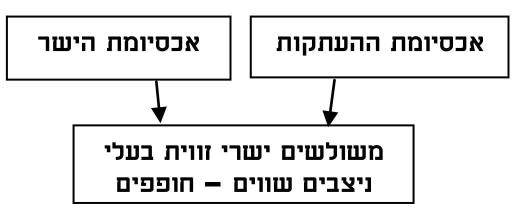


פירוט: אם נתון משולש ישר זווית ABC (כמשולש הנקוד שבימין הציור) ומשולש ישר זווית DEF (כמשולש המצויר בקו עבה), נוכל להעתיק את המשולש ABC באופן שהזווית הישרה C תונח בדיוק על הזווית הישרה F (כבציור).

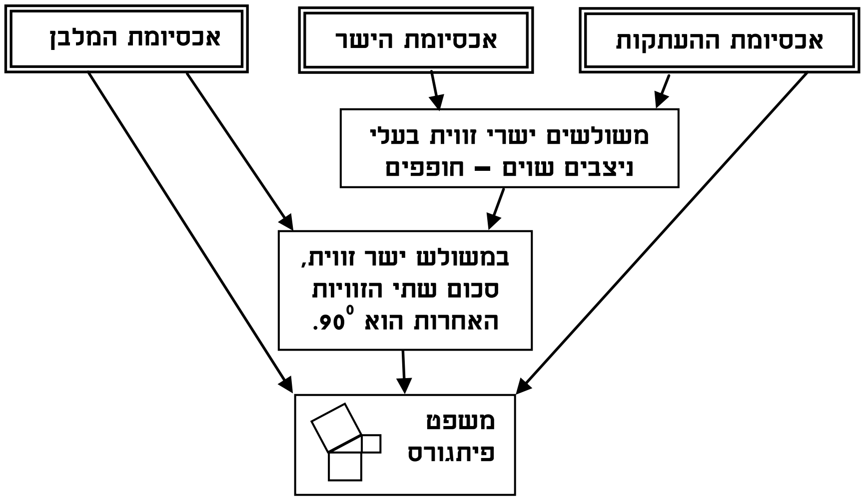
אם בנוסף על שוויון הזוויות הישרות יהיה נתון שהצלע CA שווה בדיוק לצלע FD והצלע CB שווה בדיוק ל-FE (<u>לא</u> כמו בציור), אז A תונח בדיוק על D ו-B תונח על E.

מכיוון שדרך שתי נקודות עובר ישר אחד תהיה הצלע AB מונחת על DE, וזה אומר שהמשולשים ABC ו- CEF חופפים.

נסכם בתרשים קטן שיצורף בהמשך לתרשימים הקודמים:



כעת נצרף את התרשימים באופן שהנחות היסוד, שלוש האכסיומות, תעמודנה בראש:

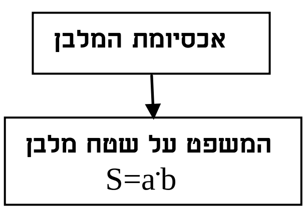


ב. קבוצה ראשונה של משפטים נוספים – משפטי שטח

הליכתנו אחורנית ממשפט פיתגורס אל הנחות היסוד נועדה למציאת בסיס לא רק למשפט פיתגורס אלא לכל הגאומטרייה. בסעיף זה נַראה כיצד מצטרפים משפטים נוספים למערכת שבנינו. תחילה נצרף משפטים מוכרים ובהמשך נצרף גם משפטים חדשים. המשפט הראשון שנצרפו יהיה המשפט על שטח מלבן שהזכרנוהו לעיל.

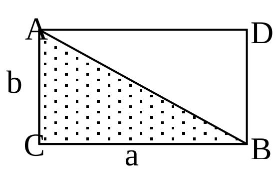
משפט: שטח מלבן שווה למכפלת אורכי צלעות שכנות שלו. ($S=a \cdot b$).

כבר הוכחנו משפט זה בעבר, וההוכחה הסתמכה על שתי הטענות שאוחדו כאן תחת השם **אכסיומת המלבן**. נרשום לעצמנו תזכורת בצורת התרשים הקטן שמשמאל ונעבור למשפט הבא:



משפט: שטחו של משולש ישר זווית שווה לחצי מכפלת הניצבים.

הוכחה: נתון משולש ישר זווית ABC שניצביו באורכים a ו-b (מיוצג על ידי המשולש הנקוד שבציור המצורף). לניצבים אלה נעלה אנכים בנקודות A ו-B ונסמן את נקודת פגישתם ב- D. וכמו בהוכחת המשפט על זוויותיו של משולש ישר זווית נקבל מאכסיומת המלבן וממשפט החפיפה של משולשים ישרי זווית, שהמרובע ACBD הוא מלבן והמשולשים ACB ו- ADB חופפים (ראה פירוט שם).



שטח כל אחד מהמשולשים האלה שווה אפוא לחצי שטח המלבן, לכן שטחו של המשולש ישר הזווית ABC הוא $a \cdot b/2$, וזה מה שרצינו להוכיח.

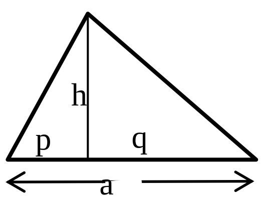
נרשום לפנינו שהוכחת המשפט התבססה על אכסיומת המלבן, על משפט החפיפה של משולשים ישרי זווית ועל המשפט על שטח המלבן. בתרשים הגדול הבא יופיע משפטנו מתחת למשפט על שטח מלבן, וחיצי-היסק יקשרו אותו גם עם האכסיומה והמשפט הנוסף ששמשו בהוכחתו.

נשתמש במשפטנו להוכחת המשפט הבא.

משפט: אם a הוא אורך אחת מצלעותיו של משולש ו-h הוא הגובה אל צלע זאת אז שטח המשולש הוא:

$$S = \frac{a \cdot h}{2}$$

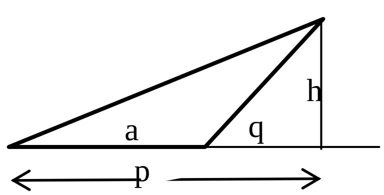
הוכחה: ההוכחה תתחלק לשני חלקים. בחלק הראשון נוכיח את המשפט בשביל גובה פנימי ובחלק השני נוכִיחו בשביל גובה חיצוני.



כאשר הגובה הוא פנימי הוא מחלק את הבסיס a לשני חלקים שנסמנם p ו- q.

המשולש כולו מתחלק על-ידי הגובה לשני משולשים ישרי-זווית, ועל-פי המשפט הקודם שטחיהם $\frac{ph}{2}$ ו- $\frac{qh}{2}$. מכאן ששטח המשולש כולו הוא:

$$\frac{ph}{2}+\frac{qh}{2}=\frac{ph+qh}{2}=\frac{(p+q)h}{2}=\frac{ah}{2} .$$



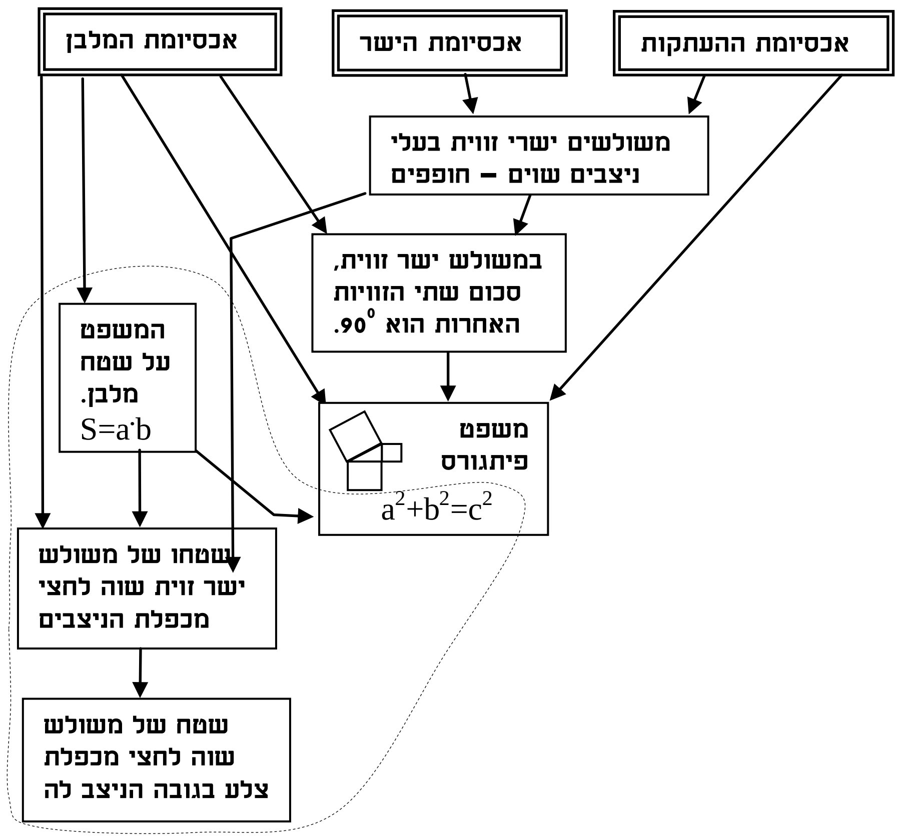
נעבור למקרה שבו הגובה הוא חיצוני למשולש.

במקרה זה יהיה המשולש הנתון חלק ממשולש ישר זווית גדול, שהגובה h הוא ניצב שלו והניצב האחר יוסומן p . חלקו האחר של המשולש הגדול אף הוא משולש ישר-זווית ו-h הוא ניצב אחד שלו. הניצב השני יוסומן q .

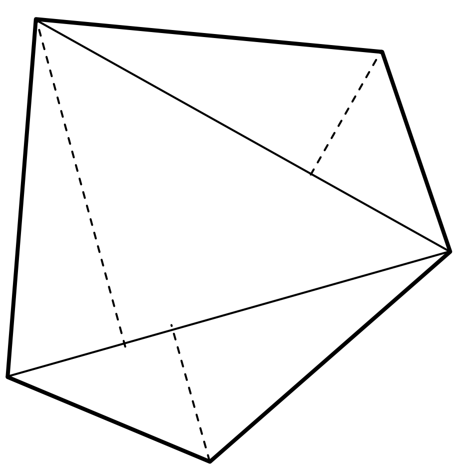
הפעם יהיה $a = p-q$, ושטח המשולש הנתון הוא $\frac{ph}{2}-\frac{qh}{2}=\frac{ph-qh}{2}=\frac{(p-q)h}{2}=\frac{ah}{2}$ ■

(הנקודה העבה שלעיל היא סימון מקובל בשביל המלים "סוף ההוכחה")

משפטנו התקבל אפוא מן המשפט הקודם לבדו, וזה מיוצג על ידי חץ אחד בתרשים הגדול שלהלן. נצרף אפוא את שלושת משפטי השטחים האלה לתרשים שלנו, ובהזדמנות זאת נוסיף למשפט פיתגורס גם את הנוסחה המתקבלת בעזרת המשפט על שטח מלבן.



התרגיל הבא מדגים את כוחו של המשפט על שטח משולש.



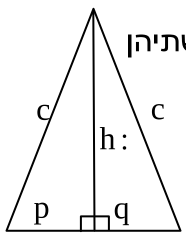
א. המחומש שלהלן חולק לשלושה משולשים, ובכל משולש נבחרה צלע וסורטט הגובה אל צלע זאת. מדדו את הצלעות המתאימות ואת הגבהים, חשבו את שטחי המשולשים ומצאו את שטחו הכללי של המחומש.

ב. חלקו את המחומש למשולשים בדרך אחרת, סרטטו גבהים, מדדו וחשבו שנית את שטח המחומש.

ג. משולשים שווי שוקיים

המשפטים הבאים עוסקים במשולש שווה שוקיים, והראשון שבהם יתקבל ממשפט פיתגורס יחד עם משפט החפיפה של משולשים ישרי זווית בעלי ניצבים שווים.

משפט: הגובה לבסיס במשולש שווה שוקיים מחלק אותו לשני משולשים חופפים.



הוכחה: נסמן קטעים באותיות כבציור (מכיוון שהשוקיים שוות סימננו את שתיהן באותה אות c) וכן נציין את הזוויות הישרות שיוצר הגובה.

לפי משפט פיתגורס יהיה $p^2 + h^2 = c^2$ וגם $q^2 + h^2 = c^2$ לכן $p^2 = q^2$

לכן $p = q$.

הצלעות p ו-h והזווית שביניהן שוות אפוא לצלעות q ו-h והזווית שביניהן, וכך נותן משפט החפיפה הנ"ל את חפיפת שני חלקיו של המשולש שווה השוקים.■

מהחפיפה שהוכחנו זה עתה נובע שהגובה h מחלק את זווית הראש של המשולש שווה השוקיים, וגם את הבסיס, לחלקים שווים. נכתוב זאת כמשפט.

משפט: במשולש שווה שוקיים, הגובה לבסיס, התיכון לבסיס וחוצה זווית הראש – מתלכדים (כלומר הם אותו קטע עצמו).

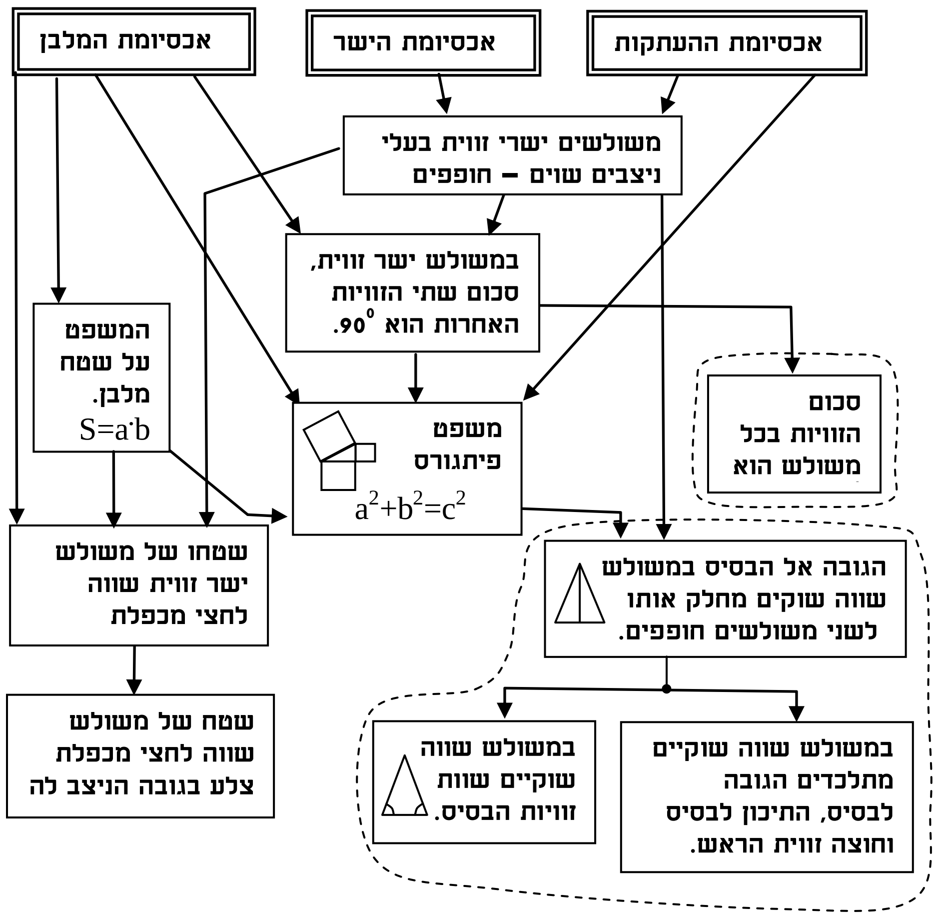
מאותה חפיפה נובע גם שהזוויות שיוצר הבסיס עם שתי השוקיים שוות זו לזו. נכתוב גם זאת כמשפט.

משפט: במשולש שווה שוקיים שוות זוויות הבסיס.

בצד שמאל של התרשים הגדול שלהלן צורפו שני משפטי השטח שלעיל ובתחתית צד ימין נצרף גם את שלושת המשפטים על משולש שווה שוקיים. כן נצרף לתרשים את המשפט על סכום הזוויות בכל משולש.

תרגיל: התוכלו לפרט הוכחה למשפט האחרון?

רמז: שימו לב לחץ הקישור שבתרשים. חלקו את המשולש לשני משולשים ישרי זווית על-ידי גובה פנימי.



תרשים זה יוכל להיות התרשים האחרון שלנו. להלכה, אחרי שנוכיח כל משפט חדש נוכל לצרף אותו לתרשים, כי כל המשפטים שנוכיח בעתיד ינבעו, דרך משפטי ביניים, משלוש הנחות היסוד שלנו. לא נטרח לעשות זאת משתי סיבות. האחת היא החשש שבדרך זו נגיע די מהר לתרשים עם קווי קישור צפופים שקשה לעקוב אחריהם, והשנייה היא זה שהתרשים הנוכחי מספיק כדי להציג את הרעיון של מערכת היסקים מסודרת היוצאת ממספר קטן של הנחות יסוד ברורות. אך למרות האמור כאן נדגים להלן גם המשכה קטנה של התרשים וגם מערכת תרגילים המוצמדת לתרשים.

והערה אחרונה: לא כל ספר גאומטרייה יוצא דווקא מהנחות היסוד שלנו ומוכיח משפטים בסדר שבו הלכנו כאן. יש הרבה דרכים סבירות לארגון הגאומטרייה כמערכת היסקים מסודרת. אך **כל** ספר גאומטרייה ראוי לשמו צריך להציג את הנחות היסוד שבחר, ולתת היסקים **שאפשר** לערוך אותם בתרשים כמו שלנו.

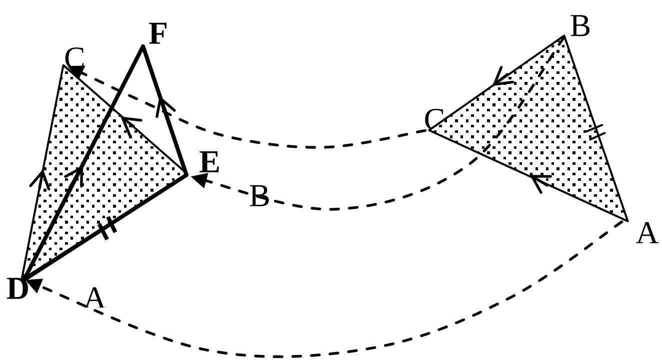
ד. משפטי החפיפה

בגוף התכנית הוצע שבמקום הנוכחי נזכיר את משפטי החפיפה בלי לפרט כיצד הם מתקבלים במערכת האכסיומטית שלנו. הפירוט הנוכחי **חורג במקצת מהתכנית.** תרגילי הפירמידה המופיעים בהמשך התכנית אינם נזקקים אלא למה שפורט עד כאן.

משפט חפיפה ראשון: אם שני משולשים שווים בשתי צלעות ובזווית שביניהם – המשולשים חופפים.
לא נפרט כאן את ההוכחה במלואה, ובמקום זה נסביר מדוע אין צורך לעשות זאת.
ובכן, את המשפט האומר שמשולשים ישרי זווית בעלי ניצבים שווים – חופפים, ניתן לנסח גם כך: אם שני משולשים שווים בשתי צלעות ואם בשניהם יש בין צלעות אלה זווית ישרה – אז המשולשים חופפים. אך בהוכחת המשפט לא השתמשנו בזה שהזוויות ישרות אלא רק בזה שאפשר להניחן זו על זו, כלומר, בזה שהן שוות; לכן טובה ההוכחה גם בשביל זוויות שוות שאינן ישרות.
משפט החפיפה הראשון נקרא גם **משפט החפיפה צלע-זווית-צלע** ונכתב בקצרה **צז"צ**.

אם נחזור ונעיין בהוכחה נמצא שהיא מסתמכת רק על שתי הנחות יסוד: אכסיומת ההעתקות ואכסיומת הישר. על סמך שתי הנחות יסוד אלה נוכיח גם את משפט החפיפה השני.
משפט חפיפה שני: אם שני משולשים שווים בשתי זוויות ובצלע שביניהן – המשולשים חופפים.
משפט חפיפה זה נכתב בקצרה **זצ"ז (זווית-צלע-זווית)**.

הוכחה: אם נתון משולש ABC (כמשולש הנקוד שבימין הציור) ומשולש DEF (כמשולש המצויר בקו עבה), ואם הצלע AB שווה לצלע DE (הצלעות השוות סומנו בציור בצמד קווקווים), נוכל להעתיק את המשולש ABC באופן שצלע AB תונח בדיוק על הצלע DE (כבציור. הצלעות השוות סומנו בצמדי קווקווים = והצלעות האחרות סומנו בחיצים ➤).



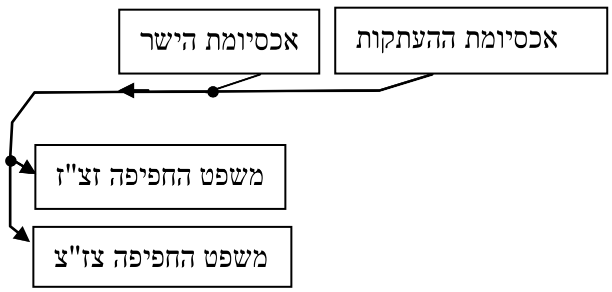
אם בנוסף על שוויון הזוויות האלה יהיה נתון שהזוית A שווה בדיוק לזווית D והזווית B שווה בדיוק לזווית E (<u>לא</u> כמו בציור), אז החיצים המתאימים יפלו זה על זה, כלומר,

הקרן מ-A לכיוון C תונח בדיוק על הקרן מ-D לכיוון F והקרן מ-B לכיוון C תונח על הקרן מ-E לכיוון F .

שני ישרים שונים אינם יכולים להיפגש בשתי נקודות שונות כי דרך שתי נקודות עובר ישר אחד בלבד, לכן C (במקומה החדש) ו-F הן אותה נקודה (נקודת המפגש) וזה אומר שהמשולשים ABC ו- CEF חופפים. ∎

נרשום אפוא את התרשים הבא:

(הסיבה לצורה המיוחדת בה סרטטנו כאן את חיצי הקישור קשורה באופן שבו ישולב תרשים זה בהמשך בתרשים הגדול)



משפט חפיפה שלישי: אם שני משולשים שווים בשלוש צלעותיהם אז הם חופפים.

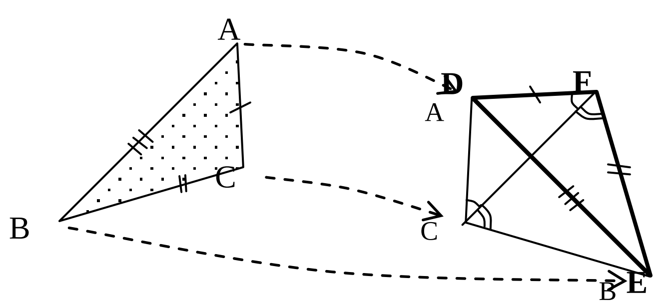
משפט חפיפה זה נכתב בקצרה **צצ"צ.**

המשפט יוכח בעזרת אכסיומת ההעתקות, המשפט על שוויון זוויות הבסיס במשולש שווה-שוקיים ומשפט החפיפה הראשון.

הוכחה: נתונים שני משולשים DEF (מצויר להלן בקו עבה) ו- ABC (המשולש הנקוד המצויר בנפרד מהמשולש DEF)

ונתון ש- FD = CA ו- EF = BC , DE = AB (הקווקווים שבציור מציינים מי שווה למי).

נעתיק את המשולש ABC באופן שהצלע AB תיפול על DE והקדקוד C ייפול מול F (לא באותו צד של DE. זה עשוי לחייב היפוך של המשולש המועתק).



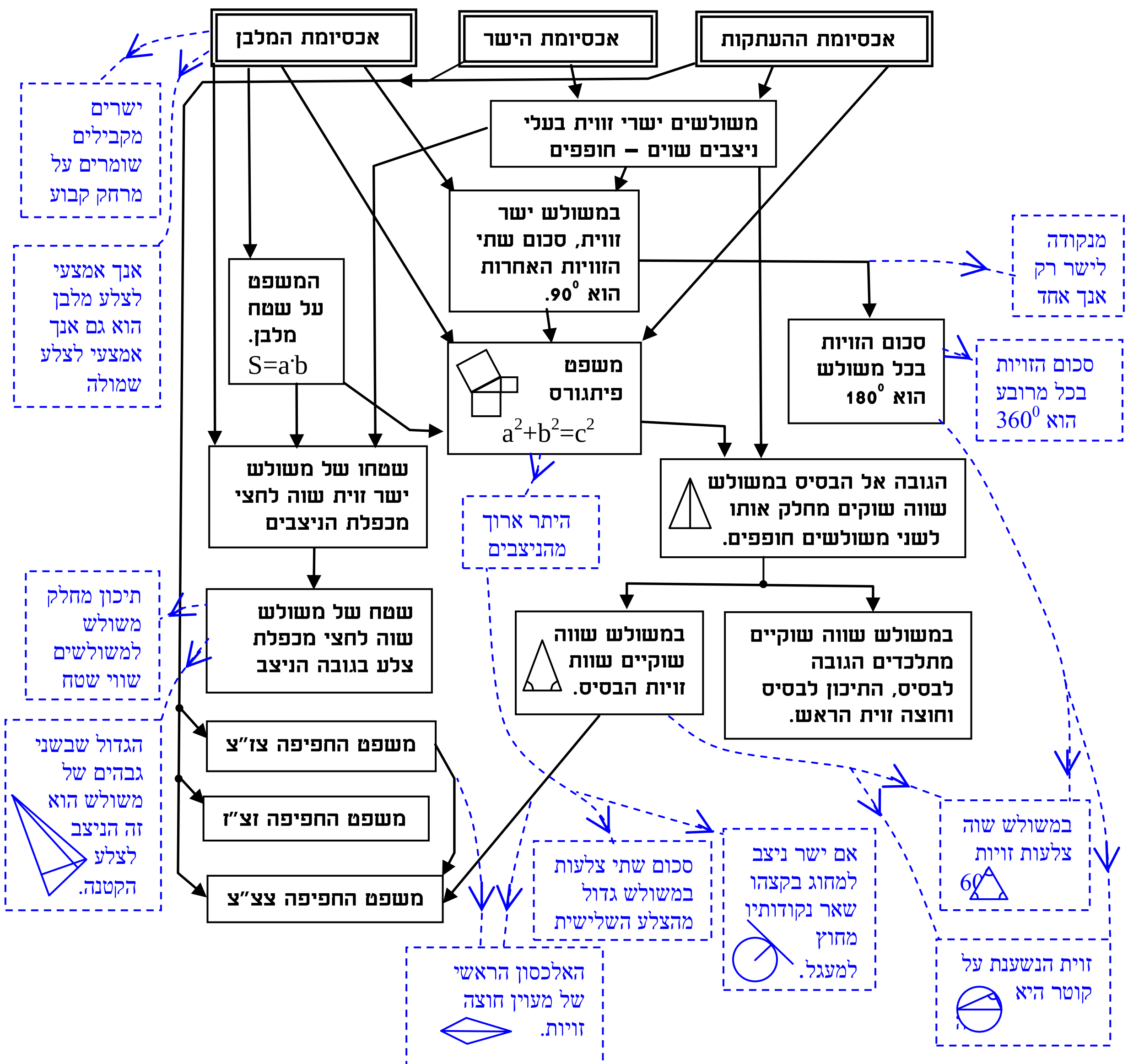
נחבר את C (במקומו החדש) אל F, ואז נקבל בשני צדדיו של CF שני משולשים שווי שוקיים ש- CF בסיס שלהם.

זוויות הבסיס בכל צד תהיינה שוות (כמסומן בציור), לכן הזווית המצורפת שעל-יד F תהיה שווה לזווית המצורפת שליד C, וממשפט החפיפה צז"צ נקבל שהמשולש ABC חופף ל- DEF ∎

בתרשים שלהלן צורפו שלושת משפטי החפיפה במלבנים רגילים ואילו מה שמוצע כתרגילים מופיע מסביב, במלבנים ובחיצי קישור מקווקוים ובצבע שונה.

ה. תרגילים למתקדמים

חלק זה חורג מן התכנית הרגילה אפילו יותר מחלק ד. בשלב זה מתכוונת התכנית לתת לכלל התלמידים תמונה של עניינו של המבנה הדדוקטיבי המסודר ועדין אינה מבקשת להיכנס להתנסות במציאת הוכחות. אך כדי שלא לעכב את המעוניינים ביותר מזה צירפנו כאן תרשים של תרגילים שרובם מיועדים למתקדמים בלבד. חלקם מנוסחים כאן במונחים העשויים שלא להיות מוכרים לתלמידים.



אחרי משפטי החפיפה אפשר לתת תרגילי חפיפה קלסיים. שוויון זוויות קדקודיות, הנדרש אצל כמה מתרגילים אלה, יחשב עובדה אריתמטית. הוא יוכלל מתוך דוגמה מספרית ומההבחנה שהדוגמה מנומקת ללא זיקה אל שום תכונה מיוחדת של המספר המעורב בה.

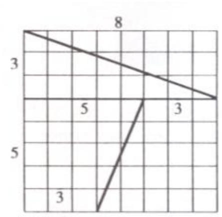
נושאים למתקדמים – דוגמאות

מספרי פיבונאצ'י (8 שעות)

מטרות

א. הכרת הסיפור ההיסטורי של סדרת מספרי פיבונאצ'י, וסדרות בעלות חוקיות פיבונאצ'י
ב. חיפוש מידע רלוונטי לנושא
ג. הכללה והנמקה אלגברית של תכונות בסדרת מספרי פיבונאצ'י
ד. הכרות וחקר מצבים מעניינים הקשורים לסדרה
ה. הכרות וחקר קשר בין סדרת פיבונאצ'י לתחומים אחרים (גאומטרייה, בעיות מילוליות, אמנות, טבע)

<table dir="rtl">
<tr><th>הנושאים</th><th>הבהרות ודוגמאות</th></tr>
<tr><td>א. הסיפור ההיסטורי של סדרת פיבונאצ'י</td><td>
הכרת סיפור הארנבות. גילוי סדרת המספרים. השלמת מספרים חסרים בסדרה על-סמך מספרים נתונים.
דוגמאות:
א. השלימו מספרים מתאימים לריבוי הארנבות בטבלה בעלת העמודות הבאות: תחילת חודש מס'; מס' זוגות צעירים (בני חודש); מס' זוגות בוגרים (בני חודשיים ומעלה); מספר זוגות נולדים; סה"כ זוגות מכל הגילים.
ב. מצאו סוגים שונים של חוקיות בטבלה המפרטת את מספרי הארנבות בגילים שונים.
ג. ידוע כי בחודשים 28 ו-29, סך כול הזוגות של ארנבות היה 317,811 ו-514,229 בהתאמה. מצאו את מספרי הארנבות בגילים שונים באותן שנים.
הכרת סדרות בעלות חוקיות פיבונאצ'י.
דוגמה:
השלימו סדרות בעלות חוקיות פיבונאצ'י – כמו למשל:
-9, __, __, -5, __, __, __
__, __, x, __, $\frac{x}{2}$, __, __, __
הכרות עם תופעות בטבע המתנהלות לפי חוקיות פיבונאצ'י.
דוגמה:
חפשו בספרים או באינטרנט תופעות המתנהגות לפי חוקיות פיבונאצ'י.
</td></tr>
</table>

ב. חקר תכונות של סדרת מספרי פיבונאצ'י	• ההכרות עם התכונות תיעשה בדרך של גילוי מודרך, במהלך אינדוקטיבי. **דוגמאות:** א. מצאו דוגמאות מספריות לתכונות הבאות: $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ $a_n = a_{n+1} - a_{n-1}$ $a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$ הסיקו על-סמך השוויונים האלה, כי $3a_n = a_{n-2} + a_{n+2}$ ב. בדרכים דומות ניתן למצוא חוקיות לגבי סכומים של מספרי פיבונאצ'י הנמצאים במקומות אי-זוגיים, זוגיים או סכום כל המספרי הסדרה עד מקום נתון. ג. מציגים את הסתירה כביכול בין בניית ריבוע שמידותיו מספר פיבונאצ'י (למשל, 8x8), חלוקתו לארבעה חלקים, ובניית מלבן בעל שטח שונה (במקרה זה, 5x13) מן החלקים האלה. זוהי נקודת יציאה לתכונה לפיה הריבוע של מספר פיבונאצ'י גדול או קטן ב-1 ממכפלת שכניו. 
ג. הכרות וחקר מצבים מעניינים הקשורים לסדרה בעלת חוקיות פיבונאצ'י	• המצבים יוצגו כ"קסמים", מתוך מטרה לחקור את ההסבר ל"קסם". **דוגמה:** בנו סדרה של שישה מספרים בסדרה בעלת חוקיות פיבונאצ'י וחברו אותם. הראו את המספרים (אך לא את הסכום) למורה הקוסם והוא ימצא את הסכום באופן מיידי. כיצד הוא עשה זאת?
ד. יחס הזהב	• ביטויים של יחס הזהב בטבע, בסביבה, ובאומנות, ומשמעותו הגיאומטרית והמספרית. **דוגמאות:** א. פירוק מלבן שמידותיו שני מספרי פיבונאצ'י סמוכים לסדרת ריבועים הולכים וקטנים, שמידותיהם מספרי פיבונאצ'י. ב. סרטוט ספיראלות במבנה מלבני שפורקו ל"ריבועי פיבונאצ'י". ג. תרגום התופעה הגיאומטרית לשוויון מספרי (סכום ריבועי מספרי פיבונאצ'י).

	ד. גבול סדרת היחסים בין מידות המלבנים שמידותיהם שני מספרי פיבונאצ'י סמוכים. ה. חיפוש מקורות על יחס הזהב, קונכיות ותופעות רלוונטיות נוספות.

היסטוריה של פתרון משוואות ליניאריות

מטרות

א. העמקה והעשרה של ידע התלמידים בנושא מרכזי של תכנית הלימודים

ב. טיפוח דרכי חשיבה אלטרנטיביים ומתן לגיטימציה לפתרונות שונים מן המקובל

ג. יצירת תדמית של המתמטיקה כמקצוע מתפתח ודינאמי, בו רעיונות, אסטרטגיות פתרון ושפת הסמלים התפתחו במשך זמן ארוך

ד. יצירת עניין ומוטיבציה ללמידת המקצוע.

הנושאים	הבהרות ודוגמאות
א. פתרון משוואות במצרים העתיקה	• הכרות עם הפפירוס המצרי על שם "ריינד" (Rhind). **דוגמה:** מתי נכתב הפפירוס? מתי התגלה? מה הוא כולל? • התיידדות עם השיטה המצרית לייצוג מספרים, תכונותיה בהשוואה לשיטה העשרונית הנהוגה כיום. **דוגמה:** כיצד כתבו המצרים את המספר 109? מדוע הם לא נזקקו לאפס? כיצד כתבו שברים? מה שונה ומה דומה בין השיטה המצרית לשיטתנו? • ביצוע פעולות אריתמטיות בשיטה המצרית. **דוגמה:** כיצד כפלו המצרים 27×13? מה יתרונות השיטה וכיצד הם קשורים לשיטת ייצוג המספרים? • פענוח של פתרון משוואה ליניארית הלקוחה מהפפירוס המצרי והשוואה לפתרון של ימינו. **דוגמה:** ניתוח ודיון של פתרון מלא של בעיה מתוך הפפירוס. • התנסות בפתרון משוואות בשיטה המצרית ודיון בכוחו של הסימול האלגברי של ימינו.

ב. שיטת ההצבה השקרית (The rule of false position).	**ההכרות עם השיטה, השוואתה לשיטה המצרית, לפתרון משוואות בעזרת נסייה וטעייה ולפתרון בעזרת נעלמים.**

הערה:

ניתן לבנות תכנית על משוואות ריבועיות עם מטרות דומות ועל בסיס הטבלאות הבבליות העתיקות והפתרונות הגאומטריים של אל-חואריזמי.

שריגים ושברים פשוטים

מטרות

א. העשרה והעמקה בנושא של שברים פשוטים

ב. הכרות עם ייצוג גרפי של שברים פשוטים על נקודות שריג של המישור הקרטזי

ג. שילוב נושאים שונים במתמטיקה (שברים, שיפוע של ישר, חוק המקבילית למציאת מספר בין שני שברים נתונים, התייחסות לשגיאות בחיבור שברים, שברים פשוטים ומספרים רציונאליים).

הנושאים	הבהרות
א. המישור הקרטזי השריגי (נקודות בעלות שיעורים שהם מספרים שלמים חיוביים) וייצוג השברים הפשוטים בו (מונה על ציר ה- Y והמכנה על ציר ה- X) **ב. הייצוג של שברים המייצגים אותו מספר רציונאלי על ישר והקשר עם השיפוע** **ג. אזורים של המישור הקרטזי המייצגים משפחות שונות של שברים.**	**הייצוג הקרטזי של שברים מאפשר בין השאר חידוד ההבחנה בין שברים שונים (למשל, ... , $\frac{3}{9}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{1}{3}$) למספר הרציונאלי אותו הם מייצגים. במישור הקרטזי, השברים השונים מיוצגים על-ידי נקודות שריג שונות. אוסף כל הנקודות המייצגות את אותו המספר הרציונאלי נמצאות על קו ישר. קו ישר זה מייצג את המספר הרציונאלי המתאים.** • ההתנסות עם הייצוג מאפשרת "לראות" הכללות או תכונות גראפיות של קבוצות מספרים. **דוגמאות:** א. ייצגו את כל השברים בעלי מכנה 3? ב. באיזה אזור של המישור הקרטזי נמצאים השברים הקטנים מ- 1?
ד. לימוד תכונות "הפעולה" $\frac{a+c}{c+d}$ בהינתן שני השברים $\frac{a}{b}$ ו- $\frac{c}{d}$ (כאשר המונים והמכנים חיוביים).	**הפעולה איננה בינארית (כלומר, אם נבחר שברים אחרים שמייצגים את אותם המספרים הרציונאליים עדיין נקבל מספר ביניהם אך שונה מהמספר שהיה מתקבל משני השברים הנתונים). ניתן לדון כיצד מיקום השבר שנוצר בין שני הנתונים "רגיש" לנציג המספר הרציונאלי שנבחר.**

דוגמה: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ניתן להראות הן באופן אלגברי והן על המישור השריגי כי אם $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ אז ניתן לדון על שגיאת החיבור והן על השימושים של "פעולה" זו בבעיות מסוימות.	

הוכחות על סמך משפט פיתגורס

<table>
<tr><th>נושאי הלימוד</th><th>הבהרות ודוגמאות</th></tr>
<tr><td>

משפט:

במשולש חד זוויות

$(c>a , c>b)$

מתקיים:

$c^2 < a^2 + b^2$

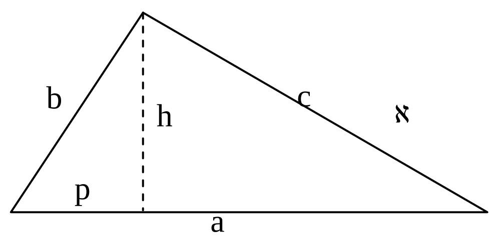
</td><td>

חישובים:

אם הזווית שבין a ל-b קטנה מ-90^0 אז $c^2<a^2+b^2$. הבה נראה בכמה קטן.

נסמן את ההיטל של b על a ב- p ואת האנך המתאים ב- h, ונקבל:

$c^2 = h^2+(a-p)^2 = h^2+a^2-2ap+p^2= a^2+b^2-2ap$



</td></tr>
<tr><td>

משפט:

במשולש קהה זווית

$(c>a , c>b)$

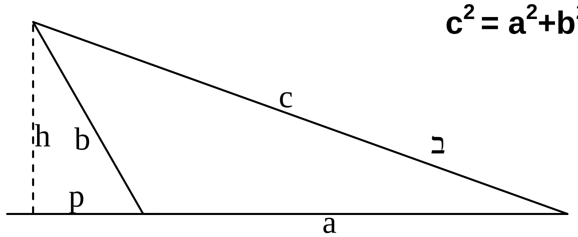
מתקיים:

$a^2 + b^2 < c^2$

</td><td>

באופן דומה, בהחלפת סימן החיסור בסימן חיבור, נקבל בשביל זווית גדולה מ-90^0 את השוויון

$c^2 = a^2+b^2+2ap$



</td></tr>
<tr><td></td><td>

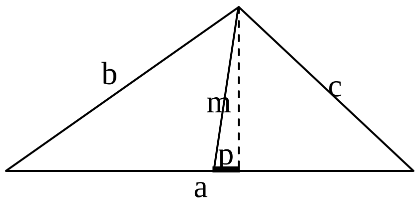
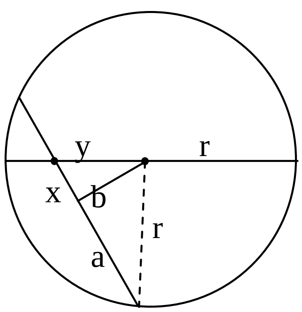
- חישוב אורך הגובה לפי אורכי הצלעות

דוגמה:

א. במשולש שצלעותיו 5 ס"מ, 12 ס"מ, 13 ס"מ חשבו את הגובה לצלע הארוכה ביותר.

ב. נתון משולש שאורכי צלעותיו ידועות. חשבו את אורכי גבהיו.

</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

	חישוב אורך תיכון לפי אורכי הצלעות **יהי m התיכון אל הצלע a,** **ונסמן ב-p את היטל** **התיכון על a** **(p מסורטט בקו עבה).**  $c^2 = m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{2}\right)p$ $b^2 = m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right)p$ **לכן** $c^2 + b^2 = 2m^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right)^2$ **לכן** $m^2 = \frac{c^2 + b^2}{2} - \frac{a^2}{4}$
משפט: **שני מיתרי מעגל החותכים זה את זה נחלקים בנקודת החיתוך באופן שמכפלת קטעי האחד שווה למכפלת קטעי חברו.**	**הוכחה:** **מספיק להוכיח זאת למקרה שאחד המיתרים הוא קוטר (מדוע?). ובכן, יהי r מחוג המעגל , a חצי המיתר שאינו הקוטר, b האנך מהמרכז אל מיתר זה ו-x ו- y ניצב ויתר במשולש המתקבל, כבציור.**  **מצד אחד,** $b^2 = y^2 - x^2$ **ומצד שני** $b^2 = r^2 - a^2$ **לכן** $r^2 - a^2 = y^2 - x^2$ **לכן** $a^2 - x^2 = r^2 - y^2$ **לכן** $(a+x)(a-x) = (r+y)(r-y)$